

# Enveloppes inférieures de fonctions admissibles sur l'espace projectif complexe. Cas dissymétrique.

*Adnène Ben Abdesselem et Brahim Dridi*

*Université Paris 6, U.F.R.929, 4, place Jussieu, 75005, Paris,  
et L.I.M. Ecole Polytechnique de Tunisie.*

*RESUME.* Cet article généralise les résultats du premier auteur concernant les fonctions admissibles sur certaines variétés de Fano [4],[5]. On étudie ici une classe plus large de fonctions, ces dernières pouvant présenter un défaut de symétrie, et on montre l'existence d'une fonction limite donnant précisément l'invariant de Tian sur les variétés considérées et minorant toutes les fonctions admissibles dont le sup est égal à zéro.

*ABSTRACT.* This paper generalizes the first author's preceding works concerning admissible functions on certain Fano manifolds [4], [5]. Here, we study a larger class of functions which can be less symmetric than the ones studied before. When the sup of these functions is null, we prove that they admit a lower bound, giving precisely Tian invariant on these manifolds.

## 1 Introduction.

Dans un travail précédent [5], le premier auteur a prouvé l'existence d'une fonction minorant toutes les fonctions admissibles à sup égal à zéro sur certains projectifs éclatés et invariants par un groupe d'automorphismes bien choisi. Ce dernier s'obtient à partir de celui de  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  et contient en particulier les automorphismes échangeant deux coordonnées homogènes entre elles. Dans cet article les projectifs éclatés considérées ne peuvent, de par leur géométrie, avoir un groupe d'automorphismes aussi riche. On montre alors le résultat ci-dessous exposé sur  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  en considérant le groupe d'automorphismes adéquat, nous permettant, à l'instar de ce qui a été fait dans [5], d'étendre la méthode aux espaces  $X$  et  $Y$  étudiés dans [6].

Rappelons dans un premier temps la définition des espaces, métriques, et groupes d'automorphismes que l'on considérera. On adoptera les notations utilisées dans [6]. Désignons par  $[z_0, z_1, \dots, z_m]$  les coordonnées homogènes de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  de dimension complexe  $m \geq 2$ .

Munissons  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  de la métrique  $g$  ayant pour composantes, dans la carte  $\{z_0 \neq 0\}$ ,

$$g_{\lambda\bar{\mu}} = (m+1)\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1+x_1+..+x_m)$$

où  $x_i = |z_i|^2$  et  $\partial_{\lambda\bar{\mu}} = \frac{\partial^2}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu}$ .

Fixons pour le reste de l'article l'entier  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ , et rappelons la définition des variétés  $X$  et  $Y$  utilisées dans [6].

$X$  est l'éclaté de  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  au dessus du sous-ensemble  $\{[0, \dots, 0, z_{k+1}, \dots, z_m]\}$  qui s'identifie à l'espace  $\mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$ ;  $Y$  est l'éclaté de  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  au dessus des sous-ensembles  $\{[z_0, \dots, z_k, 0, \dots, 0]\}$  et  $\{[0, \dots, 0, z_{k+1}, \dots, z_m]\}$  qui s'identifient respectivement à  $\mathbb{P}_k\mathbb{C}$  et  $\mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$ .

$X$  est alors la sous variété de  $\mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C}$  constituée des points

$$([z_0, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_m], [\zeta_0, \dots, \zeta_k]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C}$$

tels que les deux vecteurs  $(z_0, \dots, z_k)$  et  $(\zeta_0, \dots, \zeta_k)$  de  $\mathbb{C}^{k+1}$  soient colinéaires.

On considère alors les projections  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de  $X$  respectivement sur  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  et  $\mathbb{P}_k\mathbb{C}$ . En utilisant les métriques de Fubini-Study  $g_m$  de  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  et  $g_k$  de  $\mathbb{P}_k\mathbb{C}$ , on définit la métrique  $\tilde{g}$  sur  $X$  par

$$\tilde{g} = (m+1-k)\pi_1^*g_m + k\pi_2^*g_k.$$

Ses composantes dans la carte dense de  $X$  constituée des points :

$$([1, z_1, \dots, z_m], [1, z_1, \dots, z_k]); (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m,$$

sont données par

$$\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}} = (m+1-k)\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1+x_1+..+x_m) + k\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1+x_1+..+x_k)$$

De même,  $Y$  est la sous-variété de  $\mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$  constituée de points

$$([z_0, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_m], [\zeta_0, \dots, \zeta_k], [\eta_{k+1}, \dots, \eta_m]) \in \mathbb{P}_m\mathbb{C} \times \mathbb{P}_k\mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$$

tels que les vecteurs  $(z_0, \dots, z_k)$  et  $(z_{k+1}, \dots, z_m)$  sont respectivement proportionnels à  $(\zeta_0, \dots, \zeta_k)$  et  $(\eta_{k+1}, \dots, \eta_m)$ . Comme pour  $X$ , on considère les projections  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$  de  $Y$  respectivement sur  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{P}_k\mathbb{C}$  et  $\mathbb{P}_{m-k-1}\mathbb{C}$ . Alors

$$\hat{g} = 2\pi_1^*g_m + k\pi_2^*g_k + (m-k-1)\pi_3^*g_{m-k-1}$$

est une métrique dans  $Y$  qui a pour composantes

$$\hat{g}_{\lambda\bar{\mu}} = 2\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1+x_1+..+x_m) + k\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(1+x_1+..+x_k) + (m-k-1)\partial_{\lambda\bar{\mu}} \ln(x_{k+1}+..+x_m)$$

dans la carte dense de  $Y$

$$\{([1, z_1, \dots, z_m], [1, z_1, \dots, z_k], [z_{k+1}, \dots, z_m]), (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \text{ et } (z_{k+1}, \dots, z_m) \neq 0\}$$

On rappelle que  $\tilde{g}$  et  $\hat{g}$  sont respectivement dans la première classe de Chern de  $X$  et de  $Y$  (voir [6]); et par conséquent,  $X$  et  $Y$  sont de Fano.

On considère le groupe d'automorphismes  $G$  sur  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$  engendré par les automorphismes  $\sigma_{i,j}$ ,  $\varphi_{p,q}$ ,  $\tau_{l,\theta}$  définies  $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ ,  $p, q \in \{k+1, \dots, m\}$ ,  $l \in \{0, 1, \dots, m\}$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$  par

$$\sigma_{i,j}([z_0, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_k, \dots, z_m]) = [z_0, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_k, \dots, z_m]$$

$$\varphi_{p,q}([z_0, \dots, z_k, \dots, z_p, \dots, z_q, \dots, z_m]) = [z_0, \dots, z_k, \dots, z_q, \dots, z_p, \dots, z_m]$$

et

$$\tau_{l,\theta}([z_0, \dots, z_l, \dots, z_m]) = [z_0, \dots, z_l e^{i\theta}, \dots, z_m].$$

Ce groupe engendre des groupes d'automorphismes naturels de  $X$  et  $Y$  que l'on notera encore  $G$  dans les deux cas.

On définit sur  $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \bigcup_p \{z_p = 0\}$  la fonction  $\psi = \inf(\psi_1, \psi_2)$ , où

$$\psi_1 = \ln \frac{(|z_0| \dots |z_k|)^{2(m+1)/(k+1)}}{(|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2)^{(m+1)}}$$

et

$$\psi_2 = \ln \frac{(|z_{k+1}| \dots |z_m|)^{2(m+1)/(m-k)}}{(|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2)^{(m+1)}}.$$

$\psi_1$  et  $\psi_2$  sont homogènes de degré zéro sur  $\mathbb{C}^{m+1}$ , chacune d'entre elles induit alors une fonction sur  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ . La fonction  $\psi_1$  atteint son maximum égal à  $-(m+1) \ln(k+1)$  en les points  $[1, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{P}_m\mathbb{C}$  et tend vers moins l'infini lorsque l'une des coordonnées homogènes  $z_0, \dots, z_k$  tend vers zéro ou vers l'infini, ce qui correspond aux frontières des cartes denses définies par  $\{z_i \neq 0, 0 \leq i \leq k\}$ .

$\psi_2$  atteint son maximum égal à  $-(m+1) \ln(m-k)$  en les points  $[0, \dots, 0, e^{i\theta_{k+1}}, \dots, e^{i\theta_m}] \in \mathbb{P}_m\mathbb{C}$  et tend vers moins l'infini lorsque l'une des coordonnées homogènes  $z_{k+1}, \dots, z_m$  tend vers zéro ou vers l'infini, c'est-à-dire aux frontières des cartes denses définies par  $\{z_j \neq 0, k+1 \leq j \leq m\}$ .

Pour décrire la fonction extrémale  $\tilde{\psi}$  sur  $X$ , on considère  $\tilde{\psi}_1$  et  $\tilde{\psi}_2$  définies sur  $(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \bigcup_i \{z_i^{(0)} = 0\}) \times (\mathbb{C}^{k+1} \setminus \bigcup_j \{z_j^{(1)} = 0\})$  par

$$\tilde{\psi}_1 = \ln \frac{(|z_0^{(0)}| \dots |z_k^{(0)}|)^{\frac{2(m+1-k)}{k+1}} \times (|z_0^{(1)}| \dots |z_k^{(1)}|)^{\frac{2k}{k+1}}}{(|z_0^{(0)}|^2 + \dots + |z_m^{(0)}|^2)^{(m+1-k)} \times (|z_0^{(1)}|^2 + \dots + |z_k^{(1)}|^2)^k}$$

et

$$\tilde{\psi}_2 = \ln \frac{(|z_{k+1}^{(0)}| \dots |z_m^{(0)}|)^{\frac{2(m+1-k)}{m-k}} \times (|z_0^{(1)}| \dots |z_k^{(1)}|)^{\frac{2k}{k+1}}}{(|z_0^{(0)}|^2 + \dots + |z_m^{(0)}|^2)^{(m+1-k)} \times (|z_0^{(1)}|^2 + \dots + |z_k^{(1)}|^2)^k},$$

où  $(z_0^{(0)}, \dots, z_m^{(0)})$  sont les coordonnées de  $\mathbb{C}^{m+1}$  et  $(z_0^{(1)}, \dots, z_k^{(1)})$  sont celles de  $\mathbb{C}^{k+1}$ . Elles sont séparément homogènes de degré zéro en les composantes de chacun des

vecteurs de  $\mathbb{C}^{m+1}$  et  $\mathbb{C}^{k+1}$ . Elles définissent alors deux fonctions sur  $\mathbb{C}^{m+1} \times \mathbb{C}^{k+1}$  et donc sur  $X$ , par restriction. On pose  $\tilde{\psi} = \inf(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ .

De même pour  $Y$ , on considère les fonctions

$$\hat{\psi}_1 = \ln \left\{ \frac{(|z_0^{(0)}| \dots |z_k^{(0)}|)^{\frac{4}{k+1}}}{(|z_0^{(0)}|^2 + \dots + |z_m^{(0)}|^2)^2} \times \frac{(|z_0^{(1)}| \dots |z_k^{(1)}|)^{\frac{2k}{k+1}}}{(|z_0^{(1)}|^2 + \dots + |z_k^{(1)}|^2)^k} \right. \\ \left. \times \frac{(|z_0^{(2)}| \dots |z_{m-k-1}^{(2)}|)^{\frac{2(m-k-1)}{m-k}}}{(|z_0^{(2)}|^2 + \dots + |z_{m-k-1}^{(2)}|^2)^{(m-k-1)}} \right\}$$

et

$$\hat{\psi}_2 = \ln \left\{ \frac{(|z_{k+1}^{(0)}| \dots |z_m^{(0)}|)^{\frac{4}{m-k}}}{(|z_0^{(0)}|^2 + \dots + |z_m^{(0)}|^2)^2} \times \frac{(|z_0^{(1)}| \dots |z_k^{(1)}|)^{\frac{2k}{k+1}}}{(|z_0^{(1)}|^2 + \dots + |z_k^{(1)}|^2)^k} \right. \\ \left. \times \frac{(|z_0^{(2)}| \dots |z_{m-k-1}^{(2)}|)^{\frac{2(m-k-1)}{m-k}}}{(|z_0^{(2)}|^2 + \dots + |z_{m-k-1}^{(2)}|^2)^{(m-k-1)}} \right\}.$$

$\hat{\psi}_1$  et  $\hat{\psi}_2$  sont deux fonctions sur

$$(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \bigcup_i \{z_i^{(0)} = 0\}) \times (\mathbb{C}^{k+1} \setminus \bigcup_j \{z_j^{(1)} = 0\}) \times (\mathbb{C}^{m-k} \setminus \bigcup_q \{z_q^{(2)} = 0\})$$

où  $(z_i^{(0)})_{0 \leq i \leq m}$ ,  $(z_j^{(1)})_{0 \leq j \leq k}$  et  $(z_q^{(2)})_{0 \leq q \leq m-k-1}$  sont respectivement les coordonnées sur  $\mathbb{C}^{m+1}$ ,  $\mathbb{C}^{k+1}$  et  $\mathbb{C}^{m-k}$ . Elles sont séparément homogènes de degré zéro en les variables de  $\mathbb{C}^{m+1}$ ,  $\mathbb{C}^{k+1}$  et  $\mathbb{C}^{m-k}$ . Elles définissent des fonctions sur  $\mathbb{P}_m \mathbb{C} \times \mathbb{P}_k \mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1} \mathbb{C}$ , et donc, par restriction, sur  $Y$ . On pose alors  $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$

Enonçons à présent les principaux résultats de cet article.

**Théorème 1** *Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m \mathbb{C})$  une fonction  $g$ -admissible et  $G$ -invariante, vérifiant  $\sup \varphi = 0$  sur  $\mathbb{P}_m \mathbb{C}$ . On a alors  $\varphi \geq \psi$ .*

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 1** *Pour tout  $\alpha < \inf(\frac{k+1}{m+1}, \frac{m-k}{m+1})$ , on a l'inégalité de type Hörmander suivante (voir [10] th. 4.4.5):*

$$\int_{\mathbb{P}_m \mathbb{C}} \exp(-\alpha \varphi) dv \leq Cst,$$

pour toute fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m \mathbb{C})$ ,  $g$ -admissible,  $G$ -invariante, vérifiant  $\sup \varphi = 0$  sur  $\mathbb{P}_m \mathbb{C}$ .  $dv$  est l'élément de volume sur  $\mathbb{P}_m$  relatif à la métrique  $g$ .

**Théorème 2** *Soit  $\varphi \in C^\infty(X)$  une fonction  $\tilde{g}$ -admissible et  $G$ -invariante, vérifiant  $\sup \varphi = 0$  sur  $X$ . On a alors  $\varphi \geq \tilde{\psi}$ .*

**Corollaire 2** Pour tout  $\alpha < \inf(\frac{k+1}{m+1}, \frac{m-k}{m-k+1})$ , on a l'inégalité

$$\int_X \exp(-\alpha\varphi) d\tilde{v} \leq Cst,$$

pour toute fonction  $\varphi \in C^\infty(X)$ ,  $\tilde{g}$ -admissible,  $G$ -invariante, vérifiant  $\sup \varphi = 0$  sur  $X$ .  $d\tilde{v}$  est l'élément de volume sur  $X$  relatif à la métrique  $\tilde{g}$ .

**Théorème 3** Soit  $\varphi \in C^\infty(Y)$  une fonction  $\hat{g}$ -admissible et  $G$ -invariante, vérifiant  $\sup \varphi = 0$  sur  $Y$ . On a alors  $\varphi \geq \hat{\psi}$ .

**Corollaire 3** Pour tout  $\alpha < 1/2$ , on a l'inégalité

$$\int_Y \exp(-\alpha\varphi) d\hat{v} \leq Cst,$$

pour toute fonction  $\varphi \in C^\infty(Y)$ ,  $\hat{g}$ -admissible,  $G$ -invariante, vérifiant  $\sup \varphi = 0$  sur  $Y$ .  $d\hat{v}$  est l'élément de volume sur  $Y$  relatif à la métrique  $\hat{g}$ .

## 2 Preuve des résultats sur $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ .

### 2.1 Preuve du théorème 1.

Pour le théorème 1, on utilisera l'invariance des fonctions  $\varphi([z_0, \dots, z_m])$  par le groupe  $G$ , afin de les considérer, au lemme 1, comme des fonctions  $\varphi([1, x_1, \dots, x_m])$  des variables réelles  $x_i = |z_i|$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , puis, au lemme 2, comme des fonctions  $\varphi([x_0, \dots, x_k, 1, x_{k+2}, \dots, x_m])$  des variables réelles  $x_i = |z_i|$ ,  $i \in \{0, \dots, k, k+2, \dots, m\}$ .

**Lemme 1** Soit une fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$ ,  $g$ -admissible,  $G$ -invariante. Si  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ , dans la carte  $\{z_0 \neq 0\}$ , on a

$$(\varphi - \psi)([1, x_1, \dots, x_m]) \geq (\varphi - \psi)([1, x_1, \dots, x_k; \zeta^{[m-k]}]), \quad (1)$$

où  $\zeta = (x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}$  et  $\zeta^{[m-k]} = (\zeta, \dots, \zeta) \in \mathbb{C}^{m-k}$ .

**Preuve.** La démonstration se fait par récurrence. Supposons que pour  $k+1 \leq p < m$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i > 0$  on ait

$$\begin{aligned} (\varphi - \psi)([1, x_1, \dots, x_m]) &\geq \\ (\varphi - \psi)([1, x_1, \dots, x_k; (x_{k+1} \dots x_p)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1} \dots x_p)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}, \dots, x_m]). \end{aligned} \quad (2)$$

Cette propriété est claire pour  $p = k+1$ . Si l'inégalité (2) n'était pas satisfaite au rang  $p+1$ , il existerait alors un point  $(x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i^0 > 0$  pour tout  $i$ , tel que

$$\begin{aligned} (\varphi - \psi)([1, x_1^0, \dots, x_m^0]) &< \\ (\varphi - \psi)([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]). \end{aligned} \quad (3)$$

En utilisant la continuité de  $(\varphi - \psi)$ , on peut supposer, quitte à en modifier légèrement les coordonnées, que le point  $([1, x_1^0, \dots, x_m^0])$  de l'inégalité (3), vérifie

$$(x_1^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

propriété dont on aura besoin plus loin. En utilisant la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer que  $x_{k+1}^0 \leq \dots \leq x_m^0$ . D'autre part, en tenant encore compte de la  $G$  invariance de  $\varphi$  et de l'hypothèse de récurrence (2) en les points

$$[1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]$$

et

$$[1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+2}^0, x_{k+3}^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0],$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} (\varphi - \psi)([1, x_1^0, \dots, x_m^0]) &\geq \\ (\varphi - \psi)([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]) &\quad (4) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\varphi - \psi)([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+2}^0, \dots, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]) &\geq \\ (\varphi - \psi)([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]) &\quad (5) \end{aligned}$$

Considérons maintenant la courbe  $C$  d'équation

$$t^{p-k}x = x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0$$

dans le plan réel  $\{[1, x_1^0, \dots, x_k^0, t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]\}$  paramétré par les variables  $t$  et  $x$ . Les points

$$P_1 = [1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]$$

et

$$P_2 = [1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]$$

appartiennent à la courbe  $C$ . Notons que les réels  $x_i^0$  pour  $k+1 \leq i \leq p+1$  ne sont pas tous égaux, sinon (3) deviendrait une égalité.

Par suite, sachant que l'on a choisi  $x_{k+1}^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ , les points distincts  $P_1$  et  $P_2$  se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale  $t = x$  du plan précédent. Or la courbe  $C$  coupe cette diagonale en le point

$$P_3 = [1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]$$

qui intervient dans l'inégalité (3). D'autre part, en utilisant les relations (3), (4) et (5) on obtient :

$$(\varphi - \psi)(P_3) > (\varphi - \psi)(P_1) \text{ et } (\varphi - \psi)(P_3) > (\varphi - \psi)(P_2),$$

ce qui prouve que la fonction  $(\varphi - \psi)$  admet un maximum local sur la courbe  $C$ . En conséquence, la restriction de la fonction  $G$ -invariante  $(\varphi - \psi)$  à la courbe holomorphe (toujours notée  $C$ ) d'équation  $\xi^{p-k}z = x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0$  du plan complexe  $[1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]$  atteint un maximum local en un point  $P = C(\zeta)$ .

Posons  $C(\zeta) = [1, C^1(\zeta), \dots, C^m(\zeta)]$  et  $\dot{C}^\lambda(\xi) = \frac{dC^\lambda}{d\xi}(\xi)$  et  $\dot{C}^{\bar{\mu}}(\xi) = \overline{\dot{C}^\mu(\xi)}$ .

Sachant que l'on a choisi le point  $[1, x_1^0, \dots, x_m^0]$  de sorte que

$$(x_1^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

l'équation de la courbe  $C$  et les définitions de  $\psi_1$  et  $\psi_2$  montrent qu'en tout point de  $C$

$$\psi_1([1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]) \neq \psi_2([1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]).$$

On peut alors supposer que  $\psi = \psi_1$  dans un voisinage de  $P$ , la preuve étant identique si l'on suppose  $\psi = \psi_2$  dans ce voisinage. On a donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} \{(\varphi - \psi_1)(C(\zeta))\} = \frac{\partial^2(\varphi - \psi_1)}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu}(C(\zeta)) \dot{C}^\lambda(\zeta) \dot{C}^{\bar{\mu}}(\zeta)$$

est négatif ou nul. Comme  $-\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu} = g_{\lambda \bar{\mu}}$ , ceci exprime que la forme hermitienne de matrice:

$$(g_{\lambda \bar{\mu}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu})_{\lambda, \mu} = (\frac{\partial^2(\varphi - \psi_1)}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu})_{\lambda, \mu}$$

est négative en  $P = C(\zeta)$ . On en déduit une contradiction avec la  $g$ -admissibilité de  $\varphi$  en  $P$ . D'où l'inégalité (2) au rang  $p+1$  et, par conséquent, le lemme 1.

**Lemme 2** Soit une fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m \mathbb{C})$ ,  $g$ -admissible,  $G$ -invariante. // Si  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ , dans la carte  $\{z_{k+1} \neq 0\}$  on a

$$(\varphi - \psi)([x_0, x_1, \dots, x_k; 1, x_{k+2}, \dots, x_m]) \geq (\varphi - \psi)([\eta, \eta, \dots, \eta; 1, x_{k+2}, \dots, x_m]), \quad (6)$$

où  $\eta = (x_0 x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}$ .

**Preuve.** Comme dans le lemme 1, la preuve s'effectue par récurrence. Supposons que pour  $0 \leq p < k$  et pour tout  $(x_0, \dots, x_k; x_{k+2}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i > 0$ , on ait

$$\begin{aligned} (\varphi - \psi)([x_0, \dots, x_k, 1, x_{k+2}, \dots, x_m]) &\geq \\ (\varphi - \psi)([(x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}, \dots, x_k; 1, x_{k+2}, \dots, x_m]). \end{aligned} \quad (7)$$

Cette hypothèse est vérifiée pour  $p = 0$ . Si l'inégalité (7) n'était pas satisfaite au rang  $p + 1$ , il existerait un point  $(x_0^0, \dots, x_k; x_{k+2}, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i^0 > 0$  pour tout  $i$ , tel que :

$$\begin{aligned} &(\varphi - \psi)([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) < \\ &(\varphi - \psi)([(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]). \end{aligned} \quad (8)$$

Comme au lemme 1, on peut supposer que le point  $[x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]$  vérifie

$$(x_0^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

et que  $x_0^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ . D'autre part, en tenant compte de la  $G$ -invariance de  $\varphi$  et de l'hypothèse de récurrence (7) en les points

$$[x_0^0, x_1^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]$$

et

$$[x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0],$$

on a

$$\begin{aligned} &(\varphi - \psi)([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) \geq \\ &(\varphi - \psi)([(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) \end{aligned} \quad (9)$$

et

$$\begin{aligned} &(\varphi - \psi)([x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) \geq \\ &(\varphi - \psi)([(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]). \end{aligned} \quad (10)$$

Considérons maintenant la courbe  $C$  d'équation

$$t^{p+1}x = x_0^0 \dots x_{p+1}^0$$

du plan réel  $\{[t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]\}$  paramétré par les variables  $t$  et  $x$ . Les points

$$Q_1 = [(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]$$

et

$$Q_2 = [(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]$$

appartiennent à la courbe  $C$ .

D'autre part les réels  $x_i^0$  pour  $0 \leq i \leq p+1$  ne sont pas tous égaux, sinon (8) serait une égalité.

Par suite, sachant que l'on a choisi  $x_0^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ , les points distincts  $Q_1$  et  $Q_2$  se



trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale  $t = x$  du plan précédent. Or la courbe  $C$  coupe cette diagonale en le point

$$Q_3 = [(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]$$

qui intervient dans l'inégalité (8). D'autre part, les relation (8), (9) et (10) donnent

$$(\varphi - \psi)(Q_3) > (\varphi - \psi)(Q_1) \text{ et } (\varphi - \psi)(Q_3) > (\varphi - \psi)(Q_2),$$

ce qui prouve que la fonction  $(\varphi - \psi)$  admet un maximum local sur la courbe  $C$ . Sachant que l'on a choisi le point  $[x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]$  de sorte que

$$(x_0^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

on conclut de la même manière qu'au lemme précédent en considérant la restriction de  $(\varphi - \psi)$  à une courbe holomorphe convenable.

**Lemme 3** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m \mathbb{C})$ ,  $g$ -admissible,  $G$ -invariante, si  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ , on a*

$$(\varphi - \psi)([1, x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m]) \geq (\varphi - \psi)([1^{[k+1]}; \nu^{[m-k]}]), \quad (11)$$

où  $\nu = (x_1 \dots x_k)^{-1/(k+1)} (x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}$ .

**Preuve.** D'après le lemme 1, on a

$$\begin{aligned} & (\varphi - \psi)([1, x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m]) \\ & \geq (\varphi - \psi)([1, x_1, \dots, x_k; (x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}, \dots, (x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}]) \\ & = (\varphi - \psi)([\frac{1}{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}, \frac{x_1}{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}, \dots, \frac{x_k}{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}; 1, \dots, 1]). \end{aligned}$$

La  $(k+2)$ -ième composante homogène de ce dernier point étant égale à 1, le lemme 2 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} & (\varphi - \psi)([1, x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m]) \\ & \geq (\varphi - \psi)([\frac{1}{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}, \frac{x_1}{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}, \dots, \frac{x_k}{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}; 1, \dots, 1]) \\ & \geq (\varphi - \psi)([\frac{(x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}}{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}, \dots, \frac{(x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}}{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}; 1, \dots, 1]) \\ & = (\varphi - \psi)([1, \dots, 1; \frac{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}{(x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}}, \dots, \frac{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}{(x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}}]), \end{aligned}$$

d'où la minoration (11).

Pour la suite de la preuve du théorème 1, précisons que la  $G$  invariance ne nous permet pas d'aller plus loin, contrairement à ce qui a été fait dans [5] où le

groupe d'automorphismes est plus gros. C'est pour cette raison que l'on ne peut pas conserver ici la fonction extrémale de [5]. Celle qui apparait dans cet article nous permet de passer directement du lemme 3 à la dernière étape, à savoir le lemme suivant :

**Lemme 4** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m\mathbb{C})$ ,  $g$ -admissible,  $G$ -invariante et telle que  $\sup = 0$  sur  $\mathbb{P}_m\mathbb{C}$ , alors pour tout  $\zeta > 0$ , on a*

$$(\varphi - \psi)([1^{[k+1]}; \zeta^{[m-k]}) \geq 0, \quad (12)$$

**Preuve.** On raisonne sur la position du point  $P_0 \in \mathbb{P}_m\mathbb{C}$  où  $\varphi$  atteint son maximum. En vertu de la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer qu'il s'écrit sous la forme

$$P_0 = [y_0^0, \dots, y_k^0; y_{k+1}^0, \dots, y_m^0],$$

où les  $y_i^0$  sont des réels positifs vérifiant  $y_0^0 \geq y_1^0 \geq \dots \geq y_k^0$  et  $y_{k+1}^0 \geq y_{k+2}^0 \geq \dots \geq y_m^0$ . Deux cas se présentent : ou bien l'un des  $y_0^0, \dots, y_k^0$  est non nul, ou bien tous les  $y_0^0, \dots, y_k^0$  sont nuls.

**Cas A :** l'un des  $y_0^0, \dots, y_k^0$  est non nul. On peut alors se placer dans la carte  $\{z_0 \neq 0\}$  et écrire le point  $P_0$  sous la forme

$$P_0 = [1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+1}^0, \dots, x_m^0],$$

où les réels positifs  $x_i^0$  vérifient :  $1 \geq x_1^0 \geq \dots \geq x_k^0$  et  $x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0$ .

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point  $P_1 = [1^{[k+1]}; \zeta_0^{[m-k]}$  tel que l'on ait  $\zeta_0 > 0$  et

$$(\varphi - \psi)(P_1) < 0. \quad (13)$$

On envisage alors les deux sous-cas suivants :  $x_{k+1}^0 < \zeta_0$  puis  $x_{k+1}^0 \geq \zeta_0$ .

- $x_{k+1}^0 < \zeta_0$ .

On introduit alors la fonction auxiliaire

$$\psi_0 = \log \frac{|z_0|^{2(m+1)}}{(|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2)^{m+1}}.$$

D'une part, puisque  $\varphi \leq 0$ ,

$$(\varphi - \psi_0)([1, 0, \dots, 0]) = \varphi([1, 0, \dots, 0]) \leq 0. \quad (14)$$

De plus, sachant que  $\varphi(P_0) = 0$  et  $\psi_0 \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \psi_0)(P_0) \geq 0. \quad (15)$$

Si  $P_0 \neq [1, 0, \dots, 0]$ ,  $\psi_0(P_0) < 0$  et l'inégalité (15) est alors stricte. Si  $P_0 = [1, 0, \dots, 0]$ , quitte à se placer en un point  $P$  arbitrairement voisin de  $P_0$ , on peut supposer  $(\varphi - \psi_0)(P) > 0$ . En effet, si dans un voisinage de  $P_0$  on avait  $(\varphi - \psi_0) \leq 0$ ,

comme  $(\varphi - \psi_0)(P_0) = 0$ ,  $(\varphi - \psi_0)$  admettrait alors un maximum local en  $P_0$ , ce qui mettrait en défaut l'admissibilité de  $\varphi$  en ce point, sachant que

$$\partial_{\lambda\bar{\mu}}(\varphi - \psi_0)(P_0) = (g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi)(P_0).$$

Dans tous les cas, on peut donc affirmer qu'il existe un point  $P'_0 = [1, a_1, \dots, a_m]$  vérifiant

$$(\varphi - \psi_0)(P'_0) > 0. \quad (16)$$

Par continuité et  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer  $1 > a_1 \geq \dots \geq a_k > 0$  et  $\zeta_0 > a_{k+1} \geq \dots \geq a_m > 0$ . D'autre part, l'inégalité (13) jointe aux définitions de  $P_1$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  et  $\psi = \inf(\psi_1, \psi_2)$  implique

$$(\varphi - \psi_0)(P_1) = (\varphi - \psi_1)(P_1) \leq (\varphi - \psi)(P_1) < 0. \quad (17)$$

La courbe :

$$[0, 1] \ni t \rightarrow [1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, \dots, t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}; \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_{k+1}/\zeta_0)}{\ln a_1}}, \dots, \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_m/\zeta_0)}{\ln a_1}}]$$

passse par  $[1, 0, \dots, 0]$  en  $t = 0$  puis par  $P'_0$  en  $t = a_1$  et enfin par le point  $P_1$  en  $t = 1$ , valeurs en lesquelles, d'après (14), (16) et (17),  $(\varphi - \psi_0)$  est respectivement négative, positive puis à nouveau négative. L'invariance de cette fonction par l'action des  $\exp(i\theta)$ , permet donc de déduire que  $(\varphi - \psi_0)$  atteint un maximum sur la courbe holomorphe, complexifiée de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit encore une fois l'admissibilité de  $\varphi$ .

- $x_{k+1}^0 \geq \zeta_0$ .

Désignons dans ce cas par  $p \in \{1, \dots, m - k\}$  l'entier pour lequel on a

$$x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_{k+p}^0 > \zeta_0 \text{ et } \zeta_0 \geq x_{k+p+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0,$$

et considérons la fonction auxiliaire

$$\psi_{k+1} = \log \frac{|z_{k+1}|^{2(m+1)}}{(|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2)^{m+1}}.$$

On a

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_0) > 0. \quad (18)$$

La fonction  $(\varphi - \psi_{k+1})$  étant continue, quitte à se placer en un point voisin de  $P_0$ , on peut supposer tous les  $x_i^0$  non nuls. Posons alors:

$$\alpha_2 = \frac{\ln x_2^0}{\ln x_1^0}, \dots, \alpha_k = \frac{\ln x_k^0}{\ln x_1^0}; \alpha_{k+1} = \frac{\ln(x_{k+1}^0/\zeta_0)}{\ln x_1^0}, \dots, \alpha_m = \frac{\ln(x_m^0/\zeta_0)}{\ln x_1^0}.$$

Sachant que l'on a  $1 \geq x_1^0 \geq \dots \geq x_k^0$ ;  $x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_{k+p}^0 \geq \zeta_0$  et  $\zeta_0 \geq x_{k+p+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0$ , on en déduit que  $\alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0$ ,  $\alpha_{k+1} \leq \dots \leq \alpha_{p+k} \leq 0$  et  $\alpha_{p+k+1}, \dots, \alpha_m \geq 0$ , d'où, en notant  $P_\varepsilon = [1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, \dots, \varepsilon^{\alpha_k}, \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_{k+1}}, \dots, \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_m}]$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_{k+1}(P_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\zeta_0^{2(m+1)} \varepsilon^{2\alpha_{k+1}(m+1)}}{[1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{2\alpha_2} + \dots + \varepsilon^{2\alpha_k} + \zeta_0^2(\varepsilon^{2\alpha_{k+1}} + \dots + \varepsilon^{2\alpha_m})]^{m+1}} \\ &= \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta_0^{2(m+1)} t^{-2\alpha_{k+1}(m+1)}}{[\zeta_0^2(t^{-2\alpha_{k+1}} + t^{-2\alpha_{k+2}} + \dots + t^{-2\alpha_p})]^{m+1}} = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

$-\alpha_{k+1}$  étant la plus grande puissance intervenant au dénominateur. Sachant que  $\varphi([P_\varepsilon]) \leq 0$  et compte tenu de (18) il existe  $\varepsilon_0$  tel que l'on ait

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_{\varepsilon_0}) \leq -\psi_{k+1}(P_{\varepsilon_0}) < (\varphi - \psi_{k+1})(P_0). \quad (19)$$

D'autre part, l'inégalité (13), jointe aux définitions de  $P_1$ ,  $\psi_{k+1}$ ,  $\psi_2$  et  $\psi = \inf(\psi_1, \psi_2)$  donne :

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_1) = (\varphi - \psi_2)(P_1) \leq (\varphi - \psi)(P_1) < 0. \quad (20)$$

La courbe

$$[\varepsilon_0, 1] \ni t \rightarrow [1, t, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_k}, \zeta_0 t^{\alpha_{k+1}}, \dots, \zeta_0 t^{\alpha_m}],$$

passse par  $P_{\varepsilon_0}$  en  $t = \varepsilon_0$  puis par  $P_0$  en  $t = x_1^0$  et enfin par  $P_1$  en  $t = 1$ , ce qui, en vertu de (19), (18) et (20) prouve l'existence d'un maximum local pour la fonction  $(\varphi - \psi_{k+1})$  sur la courbe précitée. Ceci contredit, à l'instar du cas précédent, l'hypothèse d'admissibilité de la fonction  $\varphi$ .

**Cas B :**  $y_0^0 = \dots = y_k^0 = 0$ . On se place alors dans la carte  $\{z_{k+1} \neq 0\}$ , de sorte que le point  $P_0$  où  $\varphi$  atteint son maximum égal à zéro puisse s'écrire sous la forme

$$P_0 = [0, 0, \dots, 0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0].$$

On peut aussi supposer, en utilisant la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , que  $1 \geq x_{k+2}^0 \geq \dots \geq x_m^0$ . On montrera une version équivalente du lemme 4, à savoir que

$$(\varphi - \psi)([\zeta^{[k+1]}; 1^{[m-k]}]) \geq 0 \quad (21)$$

pour tout  $\zeta > 0$ . Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point  $P_{k+1} = [\zeta_0^{[k+1]}; 1^{[m-k]}]$  tel que l'on ait  $\zeta_0 > 0$  et

$$(\varphi - \psi)(P_{k+1}) < 0. \quad (22)$$

On considère alors la fonction auxiliaire  $\psi_{k+1}$  introduite plus haut. Sachant que  $\varphi \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \psi_{k+1})([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0]) = \varphi([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0]) \leq 0. \quad (23)$$

D'autre part, sachant que  $\varphi(P_0) = 0$  et  $\psi_{k+1} \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_0) = -\psi_{k+1}(P_0) \geq 0. \quad (24)$$

Cette inégalité est stricte dès que  $P_0 \neq [0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0]$ . Si  $P_0 = [0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0]$ , quitte à se placer en un point arbitrairement voisin de  $P_0$ , on peut supposer la dernière inégalité stricte. En effet, si dans un voisinage de  $P_0$ , on avait  $\varphi - \psi_{k+1} \leq 0$ , alors  $\varphi - \psi_{k+1}$  admettrait un maximum local en  $P_0$ , ce qui contredirait l'admissibilité de  $\varphi$  en  $P_0$ . A l'instar du cas A, il existe donc un point  $P'_0 = [c_0, \dots, c_k; 1, c_{k+2}, \dots, c_m]$  vérifiant

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P'_0) > 0. \quad (25)$$

Par continuité et  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer  $\zeta_0 > c_0 \geq \dots \geq c_k > 0$  et  $1 > c_{k+2} \geq \dots \geq c_m > 0$ . D'autre part, l'inégalité (22) jointe aux définitions de  $P_{k+1}$ ,  $\psi_{k+1}$ ,  $\psi_2$  et  $\psi = \inf(\psi_1, \psi_2)$  implique

$$(\varphi - \psi_{k+1})(P_{k+1}) = (\varphi - \psi_2)(P_{k+1}) \leq (\varphi - \psi)(P_{k+1}) < 0. \quad (26)$$

La courbe :

$$[0, 1] \ni t \rightarrow [\zeta_0 t^{\frac{\ln(c_0/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}, \dots, \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_k/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}; 1, t, t^{(\ln c_{k+3})/(\ln c_{k+2})}, \dots, t^{(\ln c_m)/(\ln c_{k+2})}]$$

passse par  $[0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0]$  en  $t = 0$  puis par  $P'_0$  en  $t = c_{k+2}$  et enfin par le point  $P_{k+1}$  en  $t = 1$ , valeurs en lesquelles, d'après (23), (25) et (26),  $(\varphi - \psi_{k+1})$  est respectivement négative, positive puis négative. L'invariance de cette fonction par l'action des  $\exp(i\theta)$ , permet donc de déduire que  $(\varphi - \psi_0)$  atteint un maximum sur la courbe holomorphe, déduite de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit l'admissibilité de  $\varphi$ , d'où (21) et le lemme 4.

## 2.2 Preuve du corollaire 1.

Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}_m \mathbb{C})$  une fonction  $g$ -admissible et  $G$ -invariante, dont le sup sur  $\mathbb{P}_m \mathbb{C}$  est nul. D'après le théorème 1, on a  $\varphi \geq \psi$  et par suite, pour tout  $\alpha \geq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{P}_m \mathbb{C}} \exp(-\alpha \varphi) dv \leq \int_{\mathbb{P}_m \mathbb{C}} \exp(-\alpha \psi) dv.$$

Cherchons les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles cette dernière intégrale converge. Pour ce faire, on estimera  $\int_{\mathbb{P}_m \mathbb{C}} \exp(-\alpha \psi_1) dv$  et  $\int_{\mathbb{P}_m \mathbb{C}} \exp(-\alpha \psi_2) dv$  dans la carte dense définie par  $\{z_0 = 1\}$ . Dans cette carte, l'élément de volume est donné par

$$dv = (i)^m \frac{dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m}{(1 + |z_1|^2 + \dots + |z_m|^2)^{m+1}}.$$

En utilisant la définition de  $\psi_1$  qui ne dépend que des  $|z_p|$ , par le changement de variables  $u_p = |z_p|^2$  on obtient :

$$\int_{\mathbb{P}_m \mathbb{C}} \exp(-\alpha \psi_1) dv = Cst \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(u_1 \dots u_k)^{-\alpha(m+1)/(k+1)} du_1 \dots du_m}{(1 + u_1 + \dots + u_m)^{(1-\alpha)(m+1)}}.$$

Cette intégrale converge en zéro si et seulement si :  $1 - \frac{\alpha(m+1)}{k+1} > 0$ , c'est à dire  $\alpha < (k+1)/(m+1)$ . En l'infini, le passage en coordonnées polaires ramène l'étude à la convergence de

$$\int_{a>0}^{\infty} r^{-\frac{\alpha k(m+1)}{k+1}} r^{(\alpha-1)(m+1)} r^{m-1} dr,$$

ce qui donne la condition :

$$\frac{-\alpha k(m+1)}{k+1} + (\alpha-1)(m+1) + (m-1) + 1 < 0,$$

et donc encore  $\alpha < (k+1)/(m+1)$ . Ainsi  $\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\psi_1) dv$  converge si et seulement si  $\alpha < \frac{k+1}{m+1}$ . D'autre part,

$$\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\psi_2) dv = Cst \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(u_{k+1} \dots u_m)^{-\alpha(m+1)/(m-k)} du_1 \dots du_m}{(1 + u_1 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_m)^{(1-\alpha)(m+1)}}.$$

La convergence en zéro exige  $\frac{\alpha(m+1)}{m-k} < 1$ , c'est à dire  $\alpha < \frac{m-k}{m+1}$ . En l'infini, le passage en coordonnées polaires ramène l'étude à la convergence de

$$\int_{a>0}^{\infty} r^{-\alpha(m+1)} r^{(\alpha-1)(m+1)} r^{m-1} dr = \int_{a>0}^{\infty} r^{-2} dr,$$

intégrale convergente quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . D'où la convergence de  $\int_{\mathbb{P}_m\mathbb{C}} \exp(-\alpha\psi_2) dv$  pour  $\alpha < \frac{m-k}{m+1}$  et le corollaire 1.

## 2.3 Preuve du théorème 2.

Comme pour le théorème 1, on utilisera l'invariance par le groupe  $G$  défini dans l'introduction, des fonctions  $\varphi([z_0, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_m], [\zeta_0, \dots, \zeta_k])$  où  $(z_0, \dots, z_k)$  et  $(\zeta_0, \dots, \zeta_k)$  sont colinéaires. Cela nous permettra de les considérer, dans le lemme 5 comme des fonctions  $\varphi([1, x_1, \dots, x_m], [1, x_1, \dots, x_k])$  des variables réelles  $x_i = |z_i| > 0$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , puis, dans le lemme 6 comme des fonctions

$$\varphi([x_0, \dots, x_k, 1, x_{k+2}, \dots, x_m], [x_0, \dots, x_k])$$

des variables réelles  $x_i = |z_i| > 0$ ,  $i \in \{0, \dots, k, k+2, \dots, m\}$ . Notons que ces repérages ne contiennent pas l'éclatement, les  $x_i$  étant non nuls dans l'énoncé de ces deux lemmes.

**Lemme 5** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(X)$ ,  $\tilde{g}$ -admissible,  $G$ -invariante. Si  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ :*

$$(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1, \dots, x_m], [1, x_1, \dots, x_k]) \geq (\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1, \dots, x_k; \zeta^{[m-k]}], [1, x_1, \dots, x_m]), \quad (27)$$

où  $\zeta^{[m-k]} = (\zeta, \dots, \zeta) \in \mathbb{C}^{m-k}$  et  $\zeta = (x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}$ .

**Preuve.** La démonstration se fait par récurrence, comme pour le lemme 1. Supposons que pour  $k + 1 \leq p < m$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i > 0$  on ait

$$\begin{aligned} &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1, \dots, x_m], [1, x_1, \dots, x_k]) \geq \\ &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1, \dots, x_k; (x_{k+1} \dots x_p)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1} \dots x_p)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}, \dots, x_m], \\ &[1, x_1, \dots, x_k]). \end{aligned} \quad (28)$$

Cette propriété est claire pour  $p = k + 1$ . Si l'inégalité (28) n'était pas satisfaite au rang  $p + 1$ , il existerait alors un point  $(x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i^0 > 0$  pour tout  $i$ , tel que

$$\begin{aligned} &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]) < \\ &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\ &[1, x_1^0, \dots, x_k^0]). \end{aligned} \quad (29)$$

En utilisant la continuité de  $(\varphi - \tilde{\psi})$ , on peut supposer, quitte à en modifier légèrement les coordonnées, que le point  $([1, x_1^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0])$  de l'inégalité (29), vérifie

$$(x_1^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

propriété dont on aura besoin plus loin. En utilisant la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer que  $x_{k+1}^0 \leq \dots \leq x_m^0$ . D'autre part, en tenant encore compte de la  $G$  invariance de  $\varphi$  et de l'hypothèse de récurrence (28) en les points

$$([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0])$$

et

$$([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+2}^0, x_{k+3}^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]),$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]) \geq \\ &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\ &[1, x_1^0, \dots, x_k^0]) \end{aligned} \quad (30)$$

et

$$\begin{aligned} &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+2}^0, \dots, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]) \geq \\ &(\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\ &[1, x_1^0, \dots, x_k^0]). \end{aligned} \quad (31)$$

Considérons maintenant la courbe  $C$  d'équation

$$t^{p-k}x = x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0$$

dans le plan réel  $\{[1, x_1^0, \dots, x_k^0, t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]\}$  paramétré par les variables  $t$  et  $x$ . Les points

$$\tilde{P}_1 = ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0])$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 = ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\ [1, x_1^0, \dots, x_k^0]) \end{aligned}$$

appartiennent à la courbe  $C$ . Notons que les réels  $x_i^0$  pour  $k+1 \leq i \leq p+1$  ne sont pas tous égaux, sinon (29) deviendrait une égalité.

Par suite, sachant que l'on a choisi  $x_{k+1}^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ , les points distincts  $\tilde{P}_1$  et  $\tilde{P}_2$  se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale  $t = x$  du plan précédent. Or la courbe  $C$  coupe cette diagonale en le point

$$\tilde{P}_3 = ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0])$$

qui intervient dans l'inégalité (29). D'autre part, en utilisant les relations (29), (30) et (31) on obtient :

$$(\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{P}_3) > (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{P}_1) \text{ et } (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{P}_3) > (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{P}_2),$$

ce qui prouve que la fonction  $(\varphi - \tilde{\psi})$  admet un maximum local sur la courbe  $C$ . En conséquence, la restriction de la fonction  $G$ -invariante  $(\varphi - \tilde{\psi})$  à la courbe holomorphe (toujours notée  $C$ ) d'équation  $\xi^{p-k}z = x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0$  du plan complexe  $\{([1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0])\}$  atteint un maximum local en un point  $\tilde{P} = C(\zeta)$ . Posons

$$C(\zeta) = ([1, C^1(\zeta), \dots, C^m(\zeta)], [1, C^1(\zeta), \dots, C^k(\zeta)]),$$

$$\dot{C}^\lambda(\xi) = \frac{dC^\lambda}{d\xi}(\xi) \text{ et } \dot{C}^{\bar{\mu}}(\xi) = \overline{\dot{C}^\mu(\xi)}.$$

Sachant que l'on a choisi le point  $([1, x_1^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0])$  de sorte que

$$(x_1^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

l'équation de la courbe  $C$  et les définitions de  $\tilde{\psi}_1$  et  $\tilde{\psi}_2$  montrent qu'en tout point de  $C$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1([1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]) \neq \\ \tilde{\psi}_2([1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]). \end{aligned} \quad (32)$$

On peut alors supposer que  $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1$  dans un voisinage de  $\tilde{P}$ , la preuve étant identique si l'on suppose  $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_2$  dans ce voisinage. On a donc :



$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} \{(\varphi - \tilde{\psi}_1)(C(\zeta))\} = \frac{\partial^2(\varphi - \tilde{\psi}_1)}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu} (C(\zeta)) \dot{C}^\lambda(\zeta) \dot{C}^{\bar{\mu}}(\zeta)$$

est négatif ou nul. Comme  $-\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu} = \tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}}$ , ceci exprime que la forme hermitienne de matrice:

$$(\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu})_{\lambda,\mu} = (\frac{\partial^2(\varphi - \tilde{\psi}_1)}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu})_{\lambda,\mu}$$

est négative en  $\tilde{P} = C(\zeta)$ . On en déduit une contradiction avec la  $\tilde{g}$ -admissibilité de  $\varphi$  en  $\tilde{P}$ . D'où l'inégalité (28) au rang  $p+1$  et, par conséquent, le lemme 5.

**Lemme 6** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(X)$ ,  $\tilde{g}$ -admissible,  $G$ -invariante. Si  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ , on a:*

$$\begin{aligned} (\varphi - \tilde{\psi})([x_0, x_1, \dots, x_k; 1, x_{k+2}, \dots, x_m], [x_0, x_1, \dots, x_k]) \geq \\ (\varphi - \tilde{\psi})([\eta, \eta, \dots, \eta; 1, x_{k+2}, \dots, x_m], [1^{[k+1]}]), \end{aligned} \quad (33)$$

où  $\eta = (x_0 x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}$ .

**Preuve.** Comme dans le lemme 5, la preuve s'effectue par récurrence. Supposons que pour  $0 \leq p < k$  et pour tout  $(x_0, \dots, x_k; x_{k+2}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i > 0$ , on ait

$$\begin{aligned} (\varphi - \tilde{\psi})([x_0, \dots, x_k, 1, x_{k+2}, \dots, x_m], [x_0, \dots, x_k]) \geq \\ (\varphi - \tilde{\psi})([(x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}, \dots, x_k; 1, x_{k+2}, \dots, x_m], \\ [(x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}, \dots, x_k]). \end{aligned} \quad (34)$$

Cette hypothèse est vérifiée pour  $p = 0$ . Si l'inégalité (34) n'était pas satisfaite au rang  $p+1$ , il existerait un point  $(x_0^0, \dots, x_k; x_{k+2}, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i^0 > 0$  pour tout  $i$ , tel que :

$$\begin{aligned} (\varphi - \tilde{\psi})([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, \dots, x_k^0]) < \\ (\varphi - \tilde{\psi})([(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ [(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0]). \end{aligned} \quad (35)$$

Comme au lemme 5, on peut supposer que le point

$$([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, \dots, x_k^0]) \in X$$

vérifie

$$(x_0^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

et que  $x_0^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ . D'autre part, en tenant compte de la  $G$ -invariance de  $\varphi$  et de l'hypothèse de récurrence (34) en les points

$$([x_0^0, x_1^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, x_1^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0])$$

et

$$([x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0]),$$

on a

$$\begin{aligned} (\varphi - \tilde{\psi})([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, \dots, x_k^0]) &\geq \\ (\varphi - \tilde{\psi})([(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ [(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0]) &\end{aligned} \quad (36)$$

et

$$\begin{aligned} (\varphi - \tilde{\psi})([x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0]) &\geq \\ (\varphi - \tilde{\psi})([(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ [(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0]) &\end{aligned} \quad (37)$$

Considérons maintenant la courbe  $C$  d'équation

$$t^{p+1}x = x_0^0 \dots x_{p+1}^0$$

du plan réel  $\{([t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0])\}$  paramétré par les variables  $t$  et  $x$ . Les points

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 = &([(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ &[(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0]) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2 = &([(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ &[(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0]) \end{aligned}$$

appartiennent à la courbe  $C$ .

D'autre part les réels  $x_i^0$  pour  $0 \leq i \leq p+1$  ne sont pas tous égaux, sinon (35) serait une égalité.

Par suite, sachant que l'on a choisi  $x_0^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ , les points distincts  $\tilde{Q}_1$  et  $\tilde{Q}_2$  se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale  $t = x$  du plan précédent.

Or la courbe  $C$  coupe cette diagonale en le point

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_3 = &([(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ &[(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0]) \end{aligned}$$

qui intervient dans l'inégalité (35). D'autre part, les relation (35), (36) et (37) donnent

$$(\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{Q}_3) > (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{Q}_1) \text{ et } (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{Q}_3) > (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{Q}_2),$$

ce qui prouve que la fonction  $(\varphi - \tilde{\psi})$  admet un maximum local sur la courbe  $C$ . Sachant que l'on a choisi le point

$$([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, \dots, x_k^0])$$

de sorte que

$$(x_0^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

on conclut de la même manière qu'au lemme précédent en considérant la restriction de  $(\varphi - \tilde{\psi})$  à une courbe holomorphe convenable.

A l'instar du lemme 3, les lemmes 5 et 6 permettent d'établir le

**Lemme 7** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(X)$ ,  $\tilde{g}$ -admissible,  $G$ -invariante, avec  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ , on a :*

$$\begin{aligned} & (\varphi - \tilde{\psi})([1, x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m], [1, x_1, \dots, x_k]) \\ & \geq (\varphi - \tilde{\psi})([1^{[k+1]}; \nu^{[m-k]}], [1^{[k+1]}]), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{où } \nu = \frac{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}{(x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}}.$$

Montrons maintenant le

**Lemme 8** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(X)$ ,  $\tilde{g}$ -admissible,  $G$ -invariante,  $\forall \zeta > 0$ , on a :*

$$(\varphi - \tilde{\psi})([1^{[k+1]}; \zeta^{[m-k]}], [1^{[k+1]}]) \geq 0, \quad (39)$$

**Preuve.** On raisonne sur la position du point  $\tilde{R}_0 \in \mathbb{P}_m \mathbb{C}$  où  $\varphi$  atteint son maximum. En vertu de la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer qu'il s'écrit sous la forme

$$\tilde{R}_0 = ([y_0^0, \dots, y_k^0; y_{k+1}^0, \dots, y_m^0], [\rho_0^0, \dots, \rho_k^0]),$$

où les  $y_i^0$  et  $\rho_i^0$  sont des réels positifs vérifiant  $y_0^0 \geq y_1^0 \geq \dots \geq y_k^0$ ,  $y_{k+1}^0 \geq y_{k+2}^0 \geq \dots \geq y_m^0$ ,  $\rho_0^0 \geq \dots \geq \rho_k^0$  et où  $(\rho_0^0, \dots, \rho_k^0)$  et  $(y_0^0, \dots, y_k^0)$  sont parallèles. Deux cas se présentent : ou bien l'un des  $y_0^0, \dots, y_k^0$  est non nul, ou bien tous les  $y_0^0, \dots, y_k^0$  sont nuls.

**Cas A :** l'un des  $y_0^0, \dots, y_k^0$  est non nul. On peut alors se placer dans la carte de  $X$  décrite par les points

$$([z_0, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_m], [\xi_0, \dots, \xi_k]) \in \mathbb{P}_m \mathbb{C} \times \mathbb{P}_k \mathbb{C}$$

tels que  $z_0 \neq 0$ . Ceci permet d'écrire le point  $\tilde{R}_0$  sous la forme

$$\tilde{R}_0 = ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+1}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]),$$

où les réels positifs  $x_i^0$  vérifient :  $1 \geq x_1^0 \geq \dots \geq x_k^0$  et  $x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0$ . Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point

$$\tilde{R}_1 = ([1^{[k+1]}; \zeta_0^{[m-k]}], [1^{[k+1]}])$$

tel que l'on ait  $\zeta_0 > 0$  et

$$(\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_1) < 0. \quad (40)$$

On envisage alors les deux sous-cas suivants :  $x_{k+1}^0 < \zeta_0$  puis  $x_{k+1}^0 \geq \zeta_0$ .

- $\underline{x_{k+1}^0 < \zeta_0}$ .

On introduit alors la fonction auxiliaire

$$\tilde{\psi}_0 = \log \frac{|z_0|^{2(m+1-k)} |\xi_0|^{2k}}{(|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2)^{m+1-k} (|\xi_0|^2 + \dots + |\xi_k|^2)^k}.$$

D'une part, puisque  $\varphi \leq 0$ ,

$$(\varphi - \tilde{\psi}_0)([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}]) = \varphi([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}]) \leq 0. \quad (41)$$

De plus, sachant que  $\varphi(\tilde{R}_0) = 0$  et  $\tilde{\psi}_0 \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}_0) \geq 0. \quad (42)$$

Si  $\tilde{R}_0 \neq ([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}])$ ,  $\tilde{\psi}_0(\tilde{R}_0) < 0$  et l'inégalité (42) est alors stricte. Si  $\tilde{R}_0 = ([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}])$ , quitte à se placer en un point  $\tilde{R}$  arbitrairement voisin de  $\tilde{R}_0$ , on peut supposer  $(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}) > 0$ . En effet, si dans un voisinage de  $\tilde{R}_0$  on avait  $(\varphi - \tilde{\psi}_0) \leq 0$ , comme  $(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}_0) = 0$ ,  $(\varphi - \tilde{\psi}_0)$  admettrait alors un maximum local en  $\tilde{R}_0$ , ce qui mettrait en défaut l'admissibilité de  $\varphi$  en ce point, sachant que

$$\partial_{\lambda\bar{\mu}}(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}_0) = (\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi)(\tilde{R}_0).$$

Dans tous les cas, on peut donc affirmer qu'il existe un point

$$\tilde{R}'_0 = ([1, a_1, \dots, a_m], [1, a_1, \dots, a_k])$$

vérifiant

$$(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}'_0) > 0. \quad (43)$$

Par continuité et  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer  $1 > a_1 \geq \dots \geq a_k > 0$  et  $\zeta_0 > a_{k+1} \geq \dots \geq a_m > 0$ . D'autre part, l'inégalité (40) jointe aux définitions de  $\tilde{R}_1$ ,  $\tilde{\psi}_0$ ,  $\tilde{\psi}_1$  et  $\tilde{\psi} = \inf(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$  implique

$$(\varphi - \tilde{\psi}_0)(\tilde{R}_1) = (\varphi - \tilde{\psi}_1)(\tilde{R}_1) \leq (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_1) < 0. \quad (44)$$

La courbe :

$$[0, 1] \ni t \rightarrow ([1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, \dots, t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}; \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_{k+1}/\zeta_0)}{\ln a_1}}, \dots, \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_m/\zeta_0)}{\ln a_1}}], [1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, \dots, t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}])$$

passse par  $([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}])$  en  $t = 0$  puis par  $\tilde{R}'_0$  en  $t = a_1$  et enfin par le point  $\tilde{R}_1$  en  $t = 1$ , valeurs en lesquelles, d'après (41), (43) et (44),  $(\varphi - \tilde{\psi}_0)$  est respectivement négative, positive puis à nouveau négative. L'invariance de cette fonction par l'action des  $\exp(i\theta)$ , permet donc de déduire que  $(\varphi - \tilde{\psi}_0)$  atteint un maximum sur la courbe holomorphe, complexifiée de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit encore une fois l'admissibilité de  $\varphi$ .

- $\underline{x_{k+1}^0 \geq \zeta_0}$ .

Désignons dans ce cas par  $p \in \{1, \dots, m-k\}$  l'entier pour lequel on a

$$x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_{k+p}^0 > \zeta_0 \text{ et } \zeta_0 \geq x_{k+p+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0,$$

et considérons la fonction auxiliaire

$$\tilde{\psi}_{k+1} = \log \frac{|z_{k+1}|^{2(m+1-k)} |\zeta_0|^{2k}}{(|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2)^{m+1-k} (|\zeta_0|^2 + \dots + |\zeta_k|^2)^k}.$$

On a

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_0) > 0. \quad (45)$$

La fonction  $(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})$  étant continue, quitte à se placer en un point voisin de  $\tilde{R}_0$ , on peut supposer tous les  $x_i^0$  non nuls. Posons alors:

$$\alpha_2 = \frac{\ln x_2^0}{\ln x_1^0}, \dots, \alpha_k = \frac{\ln x_k^0}{\ln x_1^0}; \alpha_{k+1} = \frac{\ln(x_{k+1}^0/\zeta_0)}{\ln x_1^0}, \dots, \alpha_m = \frac{\ln(x_m^0/\zeta_0)}{\ln x_1^0}.$$

Sachant que l'on a  $1 \geq x_1^0 \geq \dots \geq x_k^0$ ;  $x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_{k+p}^0 \geq \zeta_0$  et  $\zeta_0 \geq x_{k+p+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0$ , on en déduit que  $\alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0$ ,  $\alpha_{k+1} \leq \dots \leq \alpha_{p+k} \leq 0$  et  $\alpha_{p+k+1}, \dots, \alpha_m \geq 0$ , d'où, en notant

$$\tilde{R}_\varepsilon = ([1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, \dots, \varepsilon^{\alpha_k}, \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_{k+1}}, \dots, \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_m}], [1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, \dots, \varepsilon^{\alpha_k}]),$$

on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\psi}_{k+1}(\tilde{R}_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\zeta_0^{2(m+1-k)} \varepsilon^{2(m+1-k)\alpha_k}}{[1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{2\alpha_2} + \dots + \varepsilon^{2\alpha_k} + \zeta_0^2(\varepsilon^{2\alpha_{k+1}} + \dots + \varepsilon^{2\alpha_m})]^{m+1-k}} \\ &= \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta_0^{2(m+1-k)} t^{-2\alpha_{k+1}(m+1-k)}}{[\zeta_0^2(t^{-2\alpha_{k+1}} + t^{-2\alpha_{k+2}} + \dots + t^{-2\alpha_p})]^{(m+1-k)}} = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

$-\alpha_{k+1}$  étant la plus grande puissance intervenant au dénominateur. Sachant que  $\varphi([\tilde{R}_\varepsilon]) \leq 0$  et compte tenu de (45) il existe  $\varepsilon_0$  tel que l'on ait

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_{\varepsilon_0}) \leq -\tilde{\psi}_{k+1}(\tilde{R}_{\varepsilon_0}) < (\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_0). \quad (46)$$

D'autre part, l'inégalité (40), jointe aux définitions de  $\tilde{R}_1$ ,  $\tilde{\psi}_{k+1}$ ,  $\tilde{\psi}_2$  et  $\tilde{\psi} = \inf(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$  donne :

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_1) = (\varphi - \tilde{\psi}_2)(\tilde{R}_1) \leq (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_1) < 0. \quad (47)$$

La courbe

$$[\varepsilon_0, 1] \ni t \rightarrow ([1, t, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_k}, \zeta_0 t^{\alpha_{k+1}}, \dots, \zeta_0 t^{\alpha_m}], [1, t, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_k}]),$$

passse par  $\tilde{R}_{\varepsilon_0}$  en  $t = \varepsilon_0$  puis par  $\tilde{R}_0$  en  $t = x_1^0$  et enfin par  $\tilde{R}_1$  en  $t = 1$ , ce qui, en vertu de (46), (45) et (47) prouve l'existence d'un maximum local pour la fonction

$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})$  sur la courbe précitée. Ceci contredit, à l'instar du cas précédent, l'hypothèse d'admissibilité de la fonction  $\varphi$ .

**Cas B :**  $y_0^0 = \dots = y_k^0 = 0$ . On peut alors se placer dans la carte de  $X$  décrite par les points

$$([z_0, \dots, z_k; z_{k+1}, \dots, z_m], [\xi_0, \dots, \xi_k]) \in \mathbb{P}_m \mathbb{C} \times \mathbb{P}_k \mathbb{C}$$

tels que  $z_{k+1} \neq 0$  et  $\xi_0 \neq 0$ , de sorte que le point  $\tilde{R}_0$  où  $\varphi$  atteint son maximum égal à zéro puisse s'écrire sous la forme

$$\tilde{R}_0 = ([0, 0, \dots, 0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [1, u_1^0, \dots, u_k^0]).$$

On peut aussi supposer, en utilisant la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , que  $1 \geq x_{k+2}^0 \geq \dots \geq x_m^0$  et  $1 \geq u_1^0 \geq \dots \geq u_k^0$ . On montrera une version équivalente du lemme 8, à savoir que

$$(\varphi - \tilde{\psi})([\zeta^{[k+1]}; 1^{[m-k]}, [1^{[k+1]}]) \geq 0 \quad (48)$$

pour tout  $\zeta > 0$ .

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point

$$\tilde{R}_{k+1} = ([\zeta_0^{[k+1]}; 1^{[m-k]}, [1^{[k+1]}])$$

de  $X$  tel que l'on ait  $\zeta_0 > 0$  et

$$(\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_{k+1}) < 0. \quad (49)$$

On considère alors la fonction auxiliaire  $\tilde{\psi}_{k+1}$  introduite plus haut. Sachant que  $\varphi \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}]) = \varphi([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}]) \leq 0. \quad (50)$$

D'autre part, sachant que  $\varphi(\tilde{R}_0) = 0$  et  $\tilde{\psi}_{k+1} \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_0) = -\tilde{\psi}_{k+1}(\tilde{R}_0) \geq 0. \quad (51)$$

Cette inégalité est stricte dès que

$$\tilde{R}_0 \neq ([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}]).$$

Si  $\tilde{R}_0 = ([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}])$ , quitte à se placer en un point arbitrairement voisin de  $\tilde{R}_0$ , on peut supposer la dernière inégalité stricte. En effet, si dans un voisinage de  $\tilde{R}_0$ , on avait  $\varphi - \tilde{\psi}_{k+1} \leq 0$ , alors  $\varphi - \tilde{\psi}_{k+1}$  admettrait un maximum local en  $\tilde{R}_0$ , ce qui contredirait l'admissibilité de  $\varphi$  en  $\tilde{R}_0$ . A l'instar du cas A, il existe donc un point

$$\tilde{R}'_0 = ([c_0, \dots, c_k; 1, c_{k+2}, \dots, c_m], [c_0, \dots, c_k])$$

vérifiant

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}'_0) > 0. \quad (52)$$

Par continuité et  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer  $\zeta_0 > c_0 > \dots > c_k > 0$  et  $1 > c_{k+2} > \dots > c_m > 0$ . D'autre part, l'inégalité (49) jointe aux définitions de  $\tilde{R}_{k+1}$ ,  $\tilde{\psi}_{k+1}$ ,  $\tilde{\psi}_2$  et  $\tilde{\psi} = \inf(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$  implique

$$(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})(\tilde{R}_{k+1}) = (\varphi - \tilde{\psi}_2)(\tilde{R}_{k+1}) \leq (\varphi - \tilde{\psi})(\tilde{R}_{k+1}) < 0. \quad (53)$$

La courbe de  $X$  :

$$[0, 1] \ni t \rightarrow ([\zeta_0 t^{\frac{\ln(c_0/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}, \dots, \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_k/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}; 1, t, t^{(\ln c_{k+3})/(\ln c_{k+2})}, \dots, t^{(\ln c_m)/(\ln c_{k+2})}], \\ [1, t^{\frac{\ln(c_1/c_0)}{\ln c_{k+2}}}, \dots, t^{\frac{\ln(c_k/c_0)}{\ln c_{k+2}}}]])$$

passé par  $([0^{[k+1]}, 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}])$  en  $t = 0$  puis par  $\tilde{R}_0$  en  $t = c_{k+2}$  et enfin par le point  $\tilde{R}_{k+1}$  en  $t = 1$ , valeurs en lesquelles, d'après (50), (52) et (53),  $(\varphi - \tilde{\psi}_{k+1})$  est respectivement négative, positive puis négative. L'invariance de cette fonction par l'action des  $\exp(i\theta)$ , permet donc de déduire que  $(\varphi - \tilde{\psi}_0)$  atteint un maximum sur la courbe holomorphe, déduite de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit l'admissibilité de  $\varphi$ , d'où (48) et le lemme 8.

## 2.4 Preuve du corollaire 2.

Soit  $\varphi \in C^\infty(X)$  une fonction  $\tilde{g}$ -admissible et  $G$ -invariante, dont le sup sur  $X$  est nul. D'après le théorème 2, on a  $\varphi \geq \tilde{\psi}$  et par suite, pour tout  $\alpha \geq 0$ ,

$$\int_X \exp(-\alpha\varphi)dv \leq \int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi})dv.$$

Cherchons les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles cette dernière intégrale converge. Pour ce faire, on estimera  $\int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi}_1)dv$  et  $\int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi}_2)dv$  dans la carte dense correspondant à la paramétrisation

$$([1, z_1, \dots, z_m], [1, z_1, \dots, z_k]).$$

Dans cette carte, l'élément de volume est donné par (c.f. [6]) :

$$dv = \det((\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}}))dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m,$$

où

$$\det((\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}})) = (-1)^m \frac{(m+1-k)^{m-k}}{(1+|z_1|^2+\dots+|z_k|^2)^k(1+|z_1|^2+\dots+|z_m|^2)^{m+1}} \\ \times [k(1+|z_1|^2+\dots+|z_m|^2) + (m-k+1)(1+|z_1|^2+\dots+|z_k|^2)]^k.$$

En utilisant le fait que  $\tilde{\psi}_1$  et  $\tilde{\psi}_2$  ne dépendent que des  $|z_p|$ , le changement de variables  $u_p = |z_p|^2$  donne :

$$\int_X \exp(-\alpha\tilde{\psi}_1)dv = Cst \sum_{i=0}^k C_k^i \times$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(u_1 \dots u_k)^{-\alpha(m+1)/(k+1)} du_1 \dots du_m}{(1+u_1+\dots+u_m)^{(1-\alpha)(m+1-k)+i} (1+u_1+\dots+u_k)^{(1-\alpha)k-i}} \\ &= \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(u_1 \dots u_k)^{-\alpha(m+1)/(k+1)} du_1 \dots du_k}{(1+u_1+\dots+u_m)^{(1-\alpha)(m+1)-(m-k)}}. \end{aligned}$$

qui converge, indépendamment de  $i$  pour  $\alpha < (k+1)/(m+1)$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int_X \exp(-\alpha \tilde{\psi}_2) dv = Cst \sum_{i=0}^k C_k^i \times \\ & \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(u_1 \dots u_k)^{-\alpha k/(k+1)} (u_{k+1} \dots u_m)^{-\alpha(m+1-k)/(m-k)} du_1 \dots du_m}{(1+u_1+\dots+u_m)^{(1-\alpha)(m+1-k)+i} (1+u_1+\dots+u_k)^{(1-\alpha)k-i}}. \end{aligned}$$

Pour cette dernière intégrale, la convergence en zéro exige la condition

$$\alpha < \inf \left\{ \frac{k}{k+1}, \frac{m-k}{m-k+1} \right\}.$$

En l'infini, un changement sphérique de coordonnées ramène l'étude à la convergence de

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{r^{-\alpha k^2/(k+1)} r^{-\alpha(m+1-k)} r^{m-1}}{r^{(1-\alpha)(m+1-k)+i} r^{(1-\alpha)k-i}} dr = \int_{a>0}^{+\infty} r^{-\alpha k^2/(k+1)} r^{\alpha k-2} dr;$$

intégrale convergente pour  $\alpha < \frac{k+1}{k}$ . Cette dernière condition étant toujours vérifiée, le corollaire 2 est alors établi.

## 2.5 Preuve du théorème 3.

Comme pour l'espace  $X$ , l'invariance par le groupe  $G$ , des fonctions  $\varphi([z_0, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_m], [\zeta_0, \dots, \zeta_k], [z_0, \dots, z_k], [\zeta_0, \dots, \zeta_k])$  ainsi que  $(z_{k+1}, \dots, z_m)$  et  $(\zeta'_{k+1}, \dots, \zeta'_m)$  sont colinéaires), nous permettra de les considérer, dans le lemme 9 comme des fonctions

$$\varphi([1, x_1, \dots, x_m], [1, x_1, \dots, x_k], [x_{k+1}, \dots, x_m])$$

des variables réelles  $x_i = |z_i| > 0$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , puis, dans le lemme 10 comme des fonctions

$$\varphi([x_0, \dots, x_k, 1, x_{k+2}, \dots, x_m], [x_0, \dots, x_k], [1, x_{k+2}, \dots, x_m])$$

des variables réelles  $x_i = |z_i| > 0$ .

**Lemme 9** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(Y)$ ,  $\hat{g}$ -admissible,  $G$ -invariante. Si  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ :*

$$\begin{aligned} & (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, \dots, x_m], [1, x_1, \dots, x_k], [x_{k+1}, \dots, x_m]) \\ & \geq (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, \dots, x_k; \zeta^{[m-k]}], [1, x_1, \dots, x_m], [1^{[m-k]}]), \end{aligned} \quad (54)$$

où  $\zeta^{[m-k]} = (\zeta, \dots, \zeta) \in \mathbb{C}^{m-k}$  et  $\zeta = (x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}$ .



**Preuve.** A l'instar du lemme 5, nous procéderons par récurrence. Supposons que pour  $k+1 \leq p < m$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i > 0$  on ait

$$\begin{aligned} (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, \dots, x_m], [1, x_1, \dots, x_k], [x_{k+1}, \dots, x_m]) &\geq \\ (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1, \dots, x_k; (x_{k+1} \dots x_p)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1} \dots x_p)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}, \dots, x_m], \\ [1, x_1, \dots, x_k], [(x_{k+1} \dots x_p)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1} \dots x_p)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}, \dots, x_m]). \end{aligned} \quad (55)$$

Cette propriété est claire pour  $p = k+1$ . Si l'inégalité (55) n'était pas satisfaite au rang  $p+1$ , il existerait alors un point  $(x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i^0 > 0$  pour tout  $i$ , tel que

$$\begin{aligned} (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [x_{k+1}^0, \dots, x_m^0]) &< \\ (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\ [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [(x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]). \end{aligned} \quad (56)$$

En utilisant la continuité de  $(\varphi - \hat{\psi})$ , on peut supposer, quitte à en modifier légèrement les coordonnées, que le point

$$([1, x_1^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [x_{k+1}^0, \dots, x_m^0])$$

de l'inégalité (56), vérifie

$$(x_1^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)}.$$

En utilisant la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer que  $x_{k+1}^0 \leq \dots \leq x_m^0$ . D'autre part, en tenant encore compte de la  $G$  invariance de  $\varphi$  et de l'hypothèse de récurrence (55) en les points

$$\begin{aligned} ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\ [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+2}^0, x_{k+3}^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\ [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [x_{k+2}^0, x_{k+3}^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]), \end{aligned}$$

de  $Y$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [x_{k+1}^0, \dots, x_m^0]) &\geq \\ (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\ [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [(x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]) \end{aligned} \quad (57)$$

et

$$\begin{aligned}
& (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+2}^0, \dots, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0], \\
& [x_{k+2}^0, \dots, x_{p+1}^0, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]) \geq \\
& (\varphi - \hat{\psi})([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\
& [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [(x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]). \quad (58)
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la courbe  $C$  d'équation

$$t^{p-k}x = x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0$$

dans le plan réel

$$\{[1, x_1^0, \dots, x_k^0; t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0]\}$$

paramétré par les variables  $t$  et  $x$ . Les points

$$\begin{aligned}
\hat{P}_1 = & ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\
& [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [(x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0])
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\hat{P}_2 = & ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\
& [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [(x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, \dots, (x_{k+2}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p-k}}, x_{k+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0])
\end{aligned}$$

appartiennent à la courbe  $C$ . Notons que les réels  $x_i^0$  pour  $k+1 \leq i \leq p+1$  ne sont pas tous égaux, sinon (56) deviendrait une égalité.

Par suite, sachant que l'on a choisi  $x_{k+1}^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ , les points distincts  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale  $t = x$  du plan précédent. Or la courbe  $C$  coupe cette diagonale en le point

$$\begin{aligned}
\hat{P}_3 = & ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], \\
& [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [(x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, \dots, (x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1-k}}, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0])
\end{aligned}$$

qui intervient dans l'inégalité (56). D'autre part, en utilisant les relations (56), (57) et (58) on obtient :

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{P}_3) > (\varphi - \hat{\psi})(\hat{P}_1) \text{ et } (\varphi - \hat{\psi})(\hat{P}_3) > (\varphi - \hat{\psi})(\hat{P}_2),$$

ce qui prouve que la fonction  $(\varphi - \hat{\psi})$  admet un maximum local sur la courbe  $C$ . En conséquence, la restriction de la fonction  $G$ -invariante  $(\varphi - \hat{\psi})$  à la courbe holomorphe (toujours notée  $C$ ) d'équation  $\xi^{p-k}z = x_{k+1}^0 \dots x_{p+1}^0$  du plan complexe

$\{([1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0])\}$  atteint un maximum local en un point  $\hat{P} = C(\zeta)$ . Posons

$$C(\zeta) = ([1, C^1(\zeta), \dots, C^m(\zeta)], [1, C^1(\zeta), \dots, C^k(\zeta)], [C^{k+1}(\zeta), \dots, C^m(\zeta)]),$$

$$\dot{C}^\lambda(\xi) = \frac{dC^\lambda}{d\xi}(\xi) \text{ et } \dot{C}^{\bar{\mu}}(\xi) = \overline{\dot{C}^\mu(\xi)}.$$

Sachant que l'on a choisi le point  $([1, x_1^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [x_{k+1}^0, \dots, x_m^0])$  de sorte que

$$(x_1^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+1}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

l'équation de la courbe  $C$  et les définitions de  $\hat{\psi}_1$  et  $\hat{\psi}_2$  montrent qu'en tout point de  $C$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1([1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]) &\neq \\ \hat{\psi}_2([1, x_1^0, \dots, x_k^0; \xi, \dots, \xi, z, x_{p+2}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0]). \end{aligned} \quad (59)$$

On peut alors supposer que  $\hat{\psi} = \hat{\psi}_1$  dans un voisinage de  $\hat{P}$ , la preuve étant identique si l'on suppose  $\hat{\psi} = \hat{\psi}_2$  dans ce voisinage. On a donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} \{(\varphi - \hat{\psi}_1)(C(\zeta))\} = \frac{\partial^2(\varphi - \hat{\psi}_1)}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu} (C(\zeta)) \dot{C}^\lambda(\zeta) \dot{C}^{\bar{\mu}}(\zeta)$$

est négatif ou nul. Comme  $-\frac{\partial^2 \hat{\psi}_1}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu} = g_{\lambda\bar{\mu}}$ , ceci exprime que la forme hermitienne de matrice:

$$(g_{\lambda\bar{\mu}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu})_{\lambda, \mu} = (\frac{\partial^2(\varphi - \hat{\psi}_1)}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu})_{\lambda, \mu}$$

est négative en  $\hat{P} = C(\zeta)$ . On en déduit une contradiction avec la  $g$ -admissibilité de  $\varphi$  en  $\hat{P}$ . D'où l'inégalité (55) au rang  $p+1$  et, par conséquent, le lemme 9.

**Lemme 10** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(Y)$ ,  $\hat{g}$ -admissible,  $G$ -invariante. Si  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ , on a :*

$$\begin{aligned} (\varphi - \hat{\psi})([x_0, x_1, \dots, x_k; 1, x_{k+2}, \dots, x_m], [x_0, x_1, \dots, x_k], [1, x_{k+2}, \dots, x_m]) &\geq \\ (\varphi - \hat{\psi})([\eta, \eta, \dots, \eta; 1, x_{k+2}, \dots, x_m], [1^{[k+1]}], [1, x_{k+2}, \dots, x_m]), \end{aligned} \quad (60)$$

où  $\eta = (x_0 x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}$ .

**Preuve.** Comme dans le lemme 9, la preuve s'effectue par récurrence. Supposons que pour  $0 \leq p < k$  et pour tout  $(x_0, \dots, x_k; x_{k+2}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i > 0$ , on ait

$$\begin{aligned} (\varphi - \hat{\psi})([x_0, \dots, x_k, 1, x_{k+2}, \dots, x_m], [x_0, \dots, x_k], [1, x_{k+2}, \dots, x_m]) &\geq \\ (\varphi - \hat{\psi})((x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}, \dots, x_k; 1, x_{p+2}, \dots, x_m], \\ [(x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0 \dots x_p)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}, \dots, x_k], [1, x_{p+2}, \dots, x_m]). \end{aligned} \quad (61)$$

Cette hypothèse est vérifiée pour  $p = 0$ . Si l'inégalité (61) n'était pas satisfaite au rang  $p + 1$ , il existerait un point  $(x_0^0, \dots, x_k; x_{k+2}, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x_i^0 > 0$  pour tout  $i$ , tel que :

$$\begin{aligned} & (\varphi - \hat{\psi})([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) < \\ & (\varphi - \hat{\psi})([(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ & [(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]). \end{aligned} \quad (62)$$

Comme au lemme 9, on peut supposer que le point

$$([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) \in Y$$

vérifie

$$(x_0^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

et que  $x_0^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ . D'autre part, en tenant compte de la  $G$ -invariance de  $\varphi$  et de l'hypothèse de récurrence (61) en les points

$$([x_0^0, x_1^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, x_1^0, \dots, x_p^0, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0])$$

et

$$([x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]),$$

on a

$$\begin{aligned} & (\varphi - \hat{\psi})([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) \geq \\ & (\varphi - \hat{\psi})([(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ & [(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) \end{aligned} \quad (63)$$

et

$$\begin{aligned} & (\varphi - \hat{\psi})([x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ & [x_1^0, \dots, x_{p+1}^0, x_0^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]) \geq \\ & (\varphi - \hat{\psi})([(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ & [(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]). \end{aligned} \quad (64)$$

Considérons maintenant la courbe  $C$  d'équation

$$t^{p+1}x = x_0^0 \dots x_{p+1}^0$$

du plan réel

$$\{([t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [t, \dots, t, x, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0])\}$$

paramétré par les variables  $t$  et  $x$ . Les points

$$\begin{aligned}\hat{Q}_1 = & ([ (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ & [(x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_0^0 \dots x_p^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0])\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{Q}_2 = & ([ (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ & [(x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, \dots, (x_1^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+1}}, x_0^0, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0])\end{aligned}$$

appartiennent à la courbe  $C$ .

D'autre part les réels  $x_i^0$  pour  $0 \leq i \leq p+1$  ne sont pas tous égaux, sinon (62) serait une égalité.

Par suite, sachant que l'on a choisi  $x_0^0 \leq \dots \leq x_{p+1}^0$ , les points distincts  $\hat{Q}_1$  et  $\hat{Q}_2$  se trouvent strictement de part et d'autre de la diagonale  $t = x$  du plan précédent.

Or la courbe  $C$  coupe cette diagonale en le point

$$\begin{aligned}\hat{Q}_3 = & ([ (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], \\ & [(x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, \dots, (x_0^0 \dots x_{p+1}^0)^{\frac{1}{p+2}}, x_{p+2}^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0])\end{aligned}$$

qui intervient dans l'inégalité (62). D'autre part, les relation (62), (63) et (64) donnent

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{Q}_3) > (\varphi - \hat{\psi})(\hat{Q}_1) \text{ et } (\varphi - \hat{\psi})(\hat{Q}_3) > (\varphi - \hat{\psi})(\hat{Q}_2),$$

ce qui prouve que la fonction  $(\varphi - \hat{\psi})$  admet un maximum local sur la courbe  $C$ . Sachant que l'on a choisi le point

$$([x_0^0, \dots, x_k^0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [x_0^0, \dots, x_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0])$$

de sorte que

$$(x_0^0 \dots x_k^0)^{1/(k+1)} \neq (x_{k+2}^0 \dots x_m^0)^{1/(m-k)},$$

on conclut de la même manière qu'au lemme précédent en considérant la restriction de  $(\varphi - \hat{\psi})$  à une courbe holomorphe convenable.

A l'instar du lemme 7, les lemmes 9 et 10 permettent d'établir le

**Lemme 11** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(Y)$ ,  $\hat{g}$ -admissible,  $G$ -invariante, avec  $x_i = |z_i| > 0$  pour tout  $i$ , on a :*

$$\begin{aligned}(\varphi - \hat{\psi})(& [1, x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m], [1, x_1, \dots, x_k], [x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m]) \\ \geq & (\varphi - \hat{\psi})([1^{[k+1]}; \nu^{[m-k]}, [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}]),\end{aligned}\tag{65}$$

$$\text{où } \nu = \frac{(x_{k+1} \dots x_m)^{1/(m-k)}}{(x_1 \dots x_k)^{1/(k+1)}}.$$

Montrons maintenant le

**Lemme 12** *Etant donnée une fonction  $\varphi \in C^\infty(Y)$ ,  $\hat{g}$ -admissible,  $G$ -invariante,  $\forall \zeta > 0$ , on a :*

$$(\varphi - \hat{\psi})([1^{[k+1]}; \zeta^{[m-k]}, [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}]) \geq 0, \quad (66)$$

**Preuve.** On raisonne sur la position du point  $\hat{R}_0 \in \mathbb{P}_m \mathbb{C}$  où  $\varphi$  atteint son maximum. En vertu de la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer qu'il s'écrit sous la forme

$$\hat{R}_0 = ([y_0^0, \dots, y_k^0; y_{k+1}^0, \dots, y_m^0], [\rho_0^0, \dots, \rho_k^0], [\varrho_{k+1}^0, \dots, \varrho_m^0]),$$

où les  $y_i^0, \rho_i^0, \varrho_i^0$  sont des réels positifs vérifiant  $y_0^0 \geq y_1^0 \geq \dots \geq y_k^0, y_{k+1}^0 \geq y_{k+2}^0 \geq \dots \geq y_m^0, \rho_0^0 \geq \dots \geq \rho_k^0$  et  $\varrho_{k+1}^0 \geq \dots \geq \varrho_m^0$  et où  $(\rho_0^0, \dots, \rho_k^0)$  et  $(y_0^0, \dots, y_k^0)$  sont parallèles, ainsi que  $(\varrho_{k+1}^0, \dots, \varrho_m^0)$  et  $(y_{k+1}^0, \dots, y_m^0)$ . Trois cas se présentent : ou bien l'un des  $y_0^0, \dots, y_k^0$  et l'un des  $y_k^0, \dots, y_m^0$  sont non nuls, ou bien tous les  $y_0^0, \dots, y_k^0$  sont nuls, ou bien enfin tous les  $y_k^0, \dots, y_m^0$ . Ces deux derniers cas étant symétriques, ils se traitent de manière similaire.

**Cas A :** l'un des  $y_0^0, \dots, y_k^0$  et l'un des  $y_k^0, \dots, y_m^0$  sont non nuls. On se place alors dans la carte de  $Y$  décrite par les points

$$([z_0, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_m], [\xi_0, \dots, \xi_k], [\xi_{k+1}, \dots, \xi_m]) \in \mathbb{P}_m \mathbb{C} \times \mathbb{P}_k \mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1} \mathbb{C}$$

tels que  $z_0 \neq 0, \xi_0 \neq 0$ . Ceci permet de repérer  $\hat{R}_0$  par

$$\hat{R}_0 = ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; x_{k+1}^0, \dots, x_m^0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [x_{k+1}^0, \dots, x_m^0]),$$

où les réels positifs  $x_i^0$  vérifient :  $1 \geq x_1^0 \geq \dots \geq x_k^0$  et  $x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0$ . Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point

$$\hat{R}_1 = ([1^{[k+1]}; \zeta_0^{[m-k]}, [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}])$$

tel que l'on ait  $\zeta_0 > 0$  et

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_1) < 0. \quad (67)$$

On envisage alors les deux sous-cas suivants :  $x_{k+1}^0 < \zeta_0$  puis  $x_{k+1}^0 \geq \zeta_0$ .

- $x_{k+1}^0 < \zeta_0$ .

On introduit alors la fonction auxiliaire

$$\hat{\psi}_0 = \log \frac{|z_0|^4 |\xi_0|^{2k} |\xi_{k+1}|^{2(m-k-1)}}{(|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2)^2 (|\xi_0|^2 + \dots + |\xi_k|^2)^k (|\xi_{k+1}|^2 + \dots + |\xi_m|^2)^{m-k-1}}.$$

D'une part, puisque  $\varphi \leq 0$ ,

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) = \varphi([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) \leq 0. \quad (68)$$

De plus, sachant que  $\varphi(\hat{R}_0) = 0$  et  $\hat{\psi}_0 \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_0) \geq 0. \quad (69)$$

Si  $\hat{R}_0 \neq ([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$ ,  $\hat{\psi}_0(\hat{R}_0) < 0$  et l'inégalité (69) est alors stricte. Si  $\hat{R}_0 = ([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$ , quitte à se placer en un point  $\hat{R}$  arbitrairement voisin de  $\hat{R}_0$ , on peut supposer  $(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}) > 0$ . En effet, si dans un voisinage de  $\hat{R}_0$  on avait  $(\varphi - \hat{\psi}_0) \leq 0$ , comme  $(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_0) = 0$ ,  $(\varphi - \hat{\psi}_0)$  admettrait alors un maximum local en  $\hat{R}_0$ , ce qui mettrait en défaut l'admissibilité de  $\varphi$  en ce point, sachant que

$$\partial_{\lambda\bar{\mu}}(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_0) = (g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi)(\hat{R}_0).$$

Dans tous les cas, on peut donc affirmer qu'il existe un point

$$\hat{R}'_0 = ([1, a_1, \dots, a_m], [1, a_1, \dots, a_k], [a_{k+1}, \dots, a_m])$$

vérifiant

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}'_0) > 0. \quad (70)$$

Par continuité et  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer  $1 > a_1 > \dots > a_k > 0$  et  $\zeta_0 > a_{k+1} > \dots > a_m > 0$ . D'autre part, l'inégalité (67) jointe aux définitions de  $\hat{R}_1$ ,  $\hat{\psi}_0$ ,  $\hat{\psi}_1$  et  $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$  implique

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_1) = (\varphi - \hat{\psi}_1)(\hat{R}_1) \leq (\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_1) < 0. \quad (71)$$

La courbe :

$$[0, 1] \ni t \rightarrow ([1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, \dots, t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}; \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_{k+1}/\zeta_0)}{\ln a_1}}, \dots, \zeta_0 t^{\frac{\ln(a_m/\zeta_0)}{\ln a_1}}], \\ [1, t, t^{(\ln a_2)/(\ln a_1)}, \dots, t^{(\ln a_k)/(\ln a_1)}, [1, t^{\frac{\ln(a_{k+2}/a_{k+1})}{\ln a_1}}, \dots, t^{\frac{\ln(a_m/a_{k+1})}{\ln a_1}}])$$

passse par  $([1, 0^{[m]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$  en  $t = 0$  puis par  $\hat{R}'_0$  en  $t = a_1$  et enfin par le point  $\hat{R}_1$  en  $t = 1$ , valeurs en lesquelles, d'après (68), (70) et (71),  $(\varphi - \hat{\psi}_0)$  est respectivement négative, positive puis à nouveau négative. L'invariance de cette fonction par l'action des  $\exp(i\theta)$ , permet donc de déduire que  $(\varphi - \hat{\psi}_0)$  atteint un maximum sur la courbe holomorphe, complexifiée de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit encore une fois l'admissibilité de  $\varphi$ .

- $\underline{x_{k+1}^0} \geq \zeta_0$ .

Désignons dans ce cas par  $p \in \{1, \dots, m - k\}$  l'entier pour lequel on a

$$x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_{k+p}^0 > \zeta_0 \text{ et } \zeta_0 \geq x_{k+p+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0,$$

et considérons la fonction auxiliaire

$$\hat{\psi}_{k+1} = \log \frac{|z_{k+1}|^4 |\xi_0|^{2k} |\xi_{k+1}|^{2(m-k-1)}}{(|z_0|^2 + \dots + |z_m|^2)^2 (|\xi_0|^2 + \dots + |\xi_k|^2)^k (|\xi_{k+1}|^2 + \dots + |\xi_m|^2)^{m-k-1}}.$$

On a

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_0) > 0. \quad (72)$$

La fonction  $(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})$  étant continue, quitte à se placer en un point voisin de  $\hat{R}_0$ , on peut supposer tous les  $x_i^0$  non nuls. Posons alors:

$$\alpha_2 = \frac{\ln x_2^0}{\ln x_1^0}, \dots, \alpha_k = \frac{\ln x_k^0}{\ln x_1^0}; \alpha_{k+1} = \frac{\ln(x_{k+1}^0/\zeta_0)}{\ln x_1^0}, \dots, \alpha_m = \frac{\ln(x_m^0/\zeta_0)}{\ln x_1^0}.$$

Sachant que l'on a  $1 \geq x_1^0 \geq \dots \geq x_k^0$ ;  $x_{k+1}^0 \geq \dots \geq x_{k+p}^0 \geq \zeta_0$  et  $\zeta_0 \geq x_{k+p+1}^0 \geq \dots \geq x_m^0$ , on en déduit que  $\alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0$ ,  $\alpha_{k+1} \leq \dots \leq \alpha_{p+k} \leq 0$  et  $\alpha_{p+k+1}, \dots, \alpha_m \geq 0$ , d'où, en notant

$$\hat{R}_\varepsilon = ([1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, \dots, \varepsilon^{\alpha_k}; \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_{k+1}}, \dots, \zeta_0 \varepsilon^{\alpha_m}], [1, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha_2}, \dots, \varepsilon^{\alpha_k}], [\varepsilon^{\alpha_{k+1}}, \dots, \varepsilon^{\alpha_m}]),$$

on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\psi}_{k+1}(\hat{R}_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \frac{\zeta_0^4 \varepsilon^{4\alpha_{k+1}}}{[1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{2\alpha_2} + \dots + \varepsilon^{2\alpha_k} + \zeta_0^2 (\varepsilon^{2\alpha_{k+1}} + \dots + \varepsilon^{2\alpha_m})]^2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\varepsilon^{2(m-k-1)\alpha_{k+1}}}{(\varepsilon^{2\alpha_{k+1}} + \dots + \varepsilon^{2\alpha_m})^{m-k-1}} \right\} \\ &= \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{-2\alpha_{k+1}(m+1-k)}}{(t^{-2\alpha_{k+1}} + t^{-2\alpha_{k+2}} + \dots + t^{-2\alpha_p})^{(m+1-k)}} = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

$-\alpha_{k+1}$  étant la plus grande puissance intervenant au dénominateur. Sachant que  $\varphi([\hat{R}_\varepsilon]) \leq 0$  et compte tenu de (72) il existe  $\varepsilon_0$  tel que l'on ait

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_{\varepsilon_0}) \leq -\hat{\psi}_{k+1}(\hat{R}_{\varepsilon_0}) < (\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_0). \quad (73)$$

D'autre part, l'inégalité (67), jointe aux définitions de  $\hat{R}_1$ ,  $\hat{\psi}_{k+1}$ ,  $\hat{\psi}_2$  et  $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$  donne :

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_1) = (\varphi - \hat{\psi}_2)(\hat{R}_1) \leq (\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_1) < 0. \quad (74)$$

La courbe

$$[\varepsilon_0, 1] \ni t \rightarrow ([1, t, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_k}, \zeta_0 t^{\alpha_{k+1}}, \dots, \zeta_0 t^{\alpha_m}], [1, t, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_k}], [t^{\alpha_{k+1}}, \dots, t^{\alpha_m}]),$$

passse par  $\hat{R}_{\varepsilon_0}$  en  $t = \varepsilon_0$  puis par  $\hat{R}_0$  en  $t = x_1^0$  et enfin par  $\hat{R}_1$  en  $t = 1$ , ce qui, en vertu de (73), (72) et (74) prouve l'existence d'un maximum local pour la fonction  $(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})$  sur la courbe précitée. Ceci contredit, à l'instar du cas précédent, l'hypothèse d'admissibilité de la fonction  $\varphi$ .



**Cas B :**  $y_0^0 = \dots = y_k^0 = 0$ . On peut alors se placer dans la carte de  $Y$  décrite par les points

$$([z_0, \dots, z_k; z_{k+1}, \dots, z_m], [\xi_0, \dots, \xi_k], [\xi_{k+1}, \dots, \xi_m]) \in \mathbb{P}_m \mathbb{C} \times \mathbb{P}_k \mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1} \mathbb{C}$$

tels que  $z_{k+1} \neq 0$  et  $\xi_0 \neq 0$ , de sorte que le point  $\hat{R}_0$  où  $\varphi$  atteint son maximum égal à zéro puisse s'écrire sous la forme

$$\hat{R}_0 = ([0, 0, \dots, 0; 1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0], [1, u_1^0, \dots, u_k^0], [1, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0]).$$

On peut aussi supposer, en utilisant la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , que  $1 \geq x_{k+2}^0 \geq \dots \geq x_m^0$  et  $1 \geq u_1^0 \geq \dots \geq u_k^0$ . On montrera une version équivalente du lemme 12, à savoir que

$$(\varphi - \hat{\psi})([\zeta^{[k+1]}; 1^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}]) \geq 0 \quad (75)$$

pour tout  $\zeta > 0$ .

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point

$$\hat{R}_{k+1} = ([\zeta_0^{[k+1]}; 1^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}])$$

de  $Y$  tel que l'on ait  $\zeta_0 > 0$  et

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_{k+1}) < 0. \quad (76)$$

On considère alors la fonction auxiliaire  $\hat{\psi}_{k+1}$ . Sachant que  $\varphi \leq 0$ , on a

$$\begin{aligned} (\varphi - \hat{\psi}_{k+1})([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) = \\ \varphi([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) \leq 0. \end{aligned} \quad (77)$$

D'autre part, sachant que  $\varphi(\hat{R}_0) = 0$  et  $\hat{\psi}_{k+1} \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_0) = -\hat{\psi}_{k+1}(\hat{R}_0) \geq 0, \quad (78)$$

inégalité stricte dès que

$$\hat{R}_0 \neq ([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]).$$

Si  $\hat{R}_0 = ([0^{[k+1]}; 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}])$ , quitte à se placer en un point arbitrairement voisin de  $\hat{R}_0$ , on peut supposer la dernière inégalité stricte. En effet, si dans un voisinage de  $\hat{R}_0$ , on avait  $\varphi - \hat{\psi}_{k+1} \leq 0$ , alors  $\varphi - \hat{\psi}_{k+1}$  admettrait un maximum local en  $\hat{R}_0$ , ce qui contredirait l'admissibilité de  $\varphi$  en  $\hat{R}_0$ . A l'instar du cas A, il existe donc un point

$$\hat{R}'_0 = ([c_0, \dots, c_k; 1, c_{k+2}, \dots, c_m], [c_0, \dots, c_k], [1, c_{k+2}, \dots, c_m])$$

vérifiant

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}'_0) > 0. \quad (79)$$

Par continuité et  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer  $\zeta_0 > c_0 > \dots > c_k > 0$  et  $1 > c_{k+2} > \dots > c_m > 0$ . D'autre part, l'inégalité (76) jointe aux définitions de  $\hat{R}_{k+1}$ ,  $\hat{\psi}_{k+1}$ ,  $\hat{\psi}_2$  et  $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$  implique

$$(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})(\hat{R}_{k+1}) = (\varphi - \hat{\psi}_2)(\hat{R}_{k+1}) \leq (\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_{k+1}) < 0. \quad (80)$$

La courbe de  $Y$  :

$$[0, 1] \ni t \rightarrow ([\zeta_0 t^{\frac{\ln(c_0/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}, \dots, \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_k/\zeta_0)}{\ln c_{k+2}}}; 1, t, t^{(\ln c_{k+3})/(\ln c_{k+2})}, \dots, t^{(\ln c_m)/(\ln c_{k+2})}], \\ [1, t^{\frac{\ln(c_1/c_0)}{\ln c_{k+2}}}, \dots, t^{\frac{\ln(c_k/c_0)}{\ln c_{k+2}}}], [1, t, t^{(\ln c_{k+3})/(\ln c_{k+2})}, \dots, t^{(\ln c_m)/(\ln c_{k+2})}])$$

passse par  $([0^{[k+1]}, 1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}])$  en  $t = 0$  puis par  $\hat{R}_0$  en  $t = c_{k+2}$  et enfin par le point  $\hat{R}_{k+1}$  en  $t = 1$ , valeurs en lesquelles, d'après (77), (79) et (80),  $(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})$  est respectivement négative, positive puis négative. L'invariance de cette fonction par l'action des  $\exp(i\theta)$ , permet donc de déduire que  $(\varphi - \hat{\psi}_0)$  atteint un maximum sur la courbe holomorphe, déduite de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit l'admissibilité de  $\varphi$ , d'où (75).

**Cas C :** Les  $y_0^0, \dots, y_k^0$  sont tous nuls. On peut alors se placer dans la carte de  $Y$  décrite par les points

$$([z_0, \dots, z_k; z_{k+1}, \dots, z_m], [\xi_0, \dots, \xi_k], [\xi_{k+1}, \dots, \xi_m]) \in \mathbb{P}_m \mathbb{C} \times \mathbb{P}_k \mathbb{C} \times \mathbb{P}_{m-k-1} \mathbb{C}$$

tels que  $z_0 \neq 0$  et  $\xi_{k+1} \neq 0$ , de sorte que le point  $\hat{R}_0$  où  $\varphi$  atteint son maximum égal à zéro puisse s'écrire sous la forme

$$\hat{R}_0 = ([1, x_1^0, \dots, x_k^0; 0, 0, \dots, 0], [1, x_1^0, \dots, x_k^0], [1, u_{k+2}^0, \dots, u_m^0]).$$

On peut aussi supposer, en utilisant la  $G$ -invariance de  $\varphi$ , que  $1 \geq x_1^0 \geq \dots \geq x_k^0$  et  $1 \geq u_{k+2}^0 \geq \dots \geq u_m^0$ .

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point que l'on notera encore

$$\hat{R}_{k+1} = ([1^{[k+1]}; \zeta_0^{[m-k]}], [1^{[k+1]}], [1^{[m-k]}])$$

de  $Y$  tel que l'on ait  $\zeta_0 > 0$  et

$$(\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_{k+1}) < 0. \quad (81)$$

On considère alors la fonction auxiliaire  $\hat{\psi}_0$  définie plus haut. Sachant que  $\varphi \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)([1, 0, \dots, 0; 0^{[m-k]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) = \\ \varphi([1, 0^{[k]}; 0^{[m-k]}], [1, 0^{[k]}], [1, 0^{[m-k-1]}]) \leq 0. \quad (82)$$

D'autre part, sachant que  $\varphi(\hat{R}_0) = 0$  et  $\hat{\psi}_{k+1} \leq 0$ , on a

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_0) = -\hat{\psi}_{k+1}(\hat{R}_0) \geq 0, \quad (83)$$

inégalité stricte dès que

$$\hat{R}_0 \neq ([1, 0^{[k]}; 0^{[m-k]}, [1, 0^{[k]}, [1, 0^{[m-k-1]}]).$$

Si  $([1, 0^{[k]}; 0^{[m-k]}, [1, 0^{[k]}, [1, 0^{[m-k-1]}])$ , quitte à se placer en un point arbitrairement voisin de  $\hat{R}_0$ , on peut supposer la dernière inégalité stricte. En effet, si dans un voisinage de  $\hat{R}_0$ , on avait  $\varphi - \hat{\psi}_{k+1} \leq 0$ , alors  $\varphi - \hat{\psi}_{k+1}$  admettrait un maximum local en  $\hat{R}_0$ , ce qui contredirait l'admissibilité de  $\varphi$  en  $\hat{R}_0$ . Il existe donc un point

$$\hat{R}'_0 = ([1, c_1, \dots, c_k; c_{k+1}, \dots, c_m], [1, c_1, \dots, c_k], [c_{k+1}, \dots, c_m])$$

vérifiant

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}'_0) > 0. \quad (84)$$

Par continuité et  $G$ -invariance de  $\varphi$ , on peut supposer  $\zeta_0 > c_{k+1} > \dots > c_m > 0$  et  $1 > c_1 > \dots > c_k > 0$ . D'autre part, l'inégalité (81) jointe aux définitions de  $\hat{R}_{k+1}$ ,  $\hat{\psi}_0$ ,  $\hat{\psi}_1$  et  $\hat{\psi} = \inf(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$  implique

$$(\varphi - \hat{\psi}_0)(\hat{R}_{k+1}) = (\varphi - \hat{\psi}_1)(\hat{R}_{k+1}) \leq (\varphi - \hat{\psi})(\hat{R}_{k+1}) < 0. \quad (85)$$

La courbe de  $Y$  :

$$\begin{aligned} [0, 1] \ni t \rightarrow & ([1, t, t^{(\ln c_2)/(\ln c_1)}, \dots, t^{(\ln c_k)/(\ln c_1)}; \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_{k+1}/\zeta_0)}{\ln c_1}}, \dots, \zeta_0 t^{\frac{\ln(c_m/\zeta_0)}{\ln c_1}}], \\ & [1, t, t^{(\ln c_2)/(\ln c_1)}, \dots, t^{(\ln c_k)/(\ln c_1)}], [1, t^{\frac{\ln(c_{k+2}/c_{k+1})}{\ln c_1}}, \dots, t^{\frac{\ln(c_m/c_{k+1})}{\ln c_1}}]) \end{aligned}$$

passse par  $([1, 0, \dots, 0], [1, 0^{[k]}, [1, 0^{[m-k]}])$  en  $t = 0$  puis par  $\hat{R}_0$  en  $t = c_1$  et enfin par le point  $\hat{R}_{k+1}$  en  $t = 1$ , valeurs en lesquelles, d'après (82), (84) et (85),  $(\varphi - \hat{\psi}_{k+1})$  est respectivement négative, positive puis négative. L'invariance de cette fonction par l'action des  $\exp(i\theta)$ , permet donc de déduire que  $(\varphi - \hat{\psi}_0)$  atteint un maximum sur la courbe holomorphe, déduite de la courbe décrite plus haut, ce qui contredit l'admissibilité de  $\varphi$ , d'où et le lemme 12.

## 2.6 Preuve du corollaire 3.

Soit  $\varphi \in C^\infty(Y)$  une fonction  $\hat{g}$ -admissible et  $G$ -invariante, dont le sup sur  $Y$  est nul. D'après le théorème 3, on a  $\varphi \geq \hat{\psi}$  et par suite, pour tout  $\alpha \geq 0$ ,

$$\int_Y \exp(-\alpha\varphi)dv \leq \int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi})dv.$$

Afin d'obtenir les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles cette dernière intégrale converge, on estimera  $\int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}_1)dv$  et  $\int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}_2)dv$  dans la carte dense correspondant à la paramétrisation

$$([1, z_1, \dots, z_m], [1, z_1, \dots, z_k], [z_{k+1}, \dots, z_m]).$$

Dans cette carte, l'élément de volume est donné par (c.f. [6]) :

$$dv = \det((\hat{g}_{\lambda\bar{\mu}})) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m,$$

où

$$\det((\hat{g}_{\lambda\bar{\mu}})) = 2(-1)^m \frac{[(k+2)(1+|z_1|^2+\dots+|z_k|^2)+k(|z_{k+1}|^2+\dots+|z_m|^2)]^k}{(1+|z_1|^2+\dots+|z_k|^2)^k(|z_{k+1}|^2+\dots+|z_m|^2)^{m-k-1}} \\ \times \frac{[(m-k-1)(1+|z_1|^2+\dots+|z_k|^2)+(m-k+1)(|z_{k+1}|^2+\dots+|z_m|^2)]^{m-k-1}}{(1+|z_1|^2+\dots+|z_m|^2)^{m+1}}.$$

Si  $u_p = |z_p|^2$ , en zéro et en l'infini on a l'équivalence :

$$dv \sim \frac{Cst(>0)}{(1+u_1+\dots+u_k)^k(u_{k+1}+\dots+u_m)^{m-k-1}(1+u_1+\dots+u_m)^2}.$$

La convergence de  $\int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}_1)dv$  est donc équivalente à celle de

$$\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(u_1\dots u_k)^{-\alpha(k+2)/(k+1)}(u_{k+1}\dots u_m)^{-\alpha(m-k-1)/(m-k)}}{(1+u_1+\dots+u_m)^{2(1-\alpha)}(1+u_1+\dots+u_k)^{(1-\alpha)k}} \\ \times \frac{du_1\dots du_m}{(u_{k+1}+\dots+u_m)^{(1-\alpha)(m-k-1)}}, \quad (86)$$

qui converge en zéro pour  $\alpha < (k+1)/(k+2)$ . En l'infini en effectuant en changement de coordonnées sphériques on ramène l'étude à celle de

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{r^{-\alpha k(k+2)/(k+1)} r^{-\alpha(m-k-1)} r^{m-1}}{r^{2(1-\alpha)} r^{k(1-\alpha)} r^{(1-\alpha)(m-k-1)}} dr, \quad (87)$$

qui converge pour  $\alpha < (k+1)/(k+2)$ . De même, la convergence de  $\int_Y \exp(-\alpha\hat{\psi}_2)dv$  est équivalente à celle de

$$\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(u_1\dots u_k)^{-\alpha k/(k+1)}(u_{k+1}\dots u_m)^{-\alpha(m-k+1)/(m-k)}}{(1+u_1+\dots+u_m)^{2(1-\alpha)}(1+u_1+\dots+u_k)^{(1-\alpha)k}} \\ \times \frac{du_1\dots du_m}{(u_{k+1}+\dots+u_m)^{(1-\alpha)(m-k-1)}}, \quad (88)$$

qui converge en zéro pour  $\alpha < 1/2$ . En l'infini, cela revient à étudier la convergence de

$$\int_{a>0}^{+\infty} r^{-\alpha k^2/(k+1)} r^{-\alpha(m-k+1)} r^{-(1-\alpha)(m+1)} r^{m-1} dr, \quad (89)$$

qui converge pour  $\alpha < (k+1)/k$ , condition toujours vérifiée, d'où le corollaire 3.

## References

- [1] T.AUBIN– Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes à la démonstration d'une inégalité , *J. Funct. Anal.* 57, 1984, 143-153.

- [2] T.AUBIN– Métriques d'Einstein-Kähler et exponentiel de fonctions admissibles, *J. Funct. Anal.* 88, 1990, 385-394.
- [3] T.AUBIN– Some Non-linear Problems in Riemannian Geometry, *Springer-Verlag, Berlin, 1998.*
- [4] A.BEN ABDESSELEM– Lower bound of admissible functions on sphere, *Bull. Sci. Math.* 126, 2002, 675-680.
- [5] A.BEN ABDESSELEM– Enveloppes inférieures de fonctions admissibles sur l'espace projectif complexe. Cas symétrique, à paraître. (Arxiv D.G, 2003)
- [6] A.BEN ABDESSELEM–P.CHERRIER– Estimation of ricci tensor on certain Fano manifolds, *Math.Z.* 233, 2000, 481-505
- [7] A.BEN ABDESSELEM–P.CHERRIER– On Ricci curvature of certain complex bundles, *J. Math. Pures Appl.* 9, 2000, 919-940.
- [8] A.BEN ABDESSELEM–P.CHERRIER– Einstein-Kähler metrics on a class of bundles involving integral weights, *J.Math. Pures Appl.* 3, vol 81, 2002, 259-281.
- [9] J.P. BOURGUIGNON– Métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés de Fano : Obstructions et existence, *Sém. Bourbaki*, 1996-97, 277-305.
- [10] L. HÖRMANDER – An introduction to complex analysis in several variables, *North-Holland, Amsterdam, 1973.*
- [11] A.M. NADEL– Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, *Ann. Math.* 132, 1990, 549-596.
- [12] Y.T. SIU– The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and suitable finite symmetry group, *Ann. of Math.* 127, 1988, 585-627.
- [13] G. TIAN– On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with  $C_1(M) > 0$ , *Invent. Math.* 89, 1987, 225-246.
- [14] G. TIAN–S.T. YAU– Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with  $C_1 > 0$ , *Comment. Math. Phys.*, 112, 1987, 175-203.
- [15] X. ZHU– Kähler-Ricci solitons on Toric Fano varieties, *IHES/M/00/58, 2000.*

---

Université Pierre et Marie Curie, Paris, France.  
 e-mail: benabdes@math.jussieu.fr  
 dridi@math.jussieu.fr